Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi IV modulo

a.a. 2003-2004

[18.2.2004]

Equazioni differenziali a variabili separabili:

$$y' = -2xy^2, \quad xy' = 2y, \quad y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y' = \sqrt{1-y^2}.$$

Per casa:

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad yy' = 2x^3, \quad y' = x\sqrt{1-y^2}$$

[25.2.2004]

Equazioni a variabili separabili

$$y' = xe^{x^2+y}, \qquad \begin{cases} y' = 5x^2\sqrt{y}^3 \\ y(2) = 33 - 2\sqrt{32}. \end{cases}$$

Equazioni omogenee:

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}, \quad y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}.$$

Equazioni di Bernoulli:

$$y' + y\sin x + y^4 \sin(2x) = 0.$$

[3.3.2004]

Equazioni di Clairaut:

$$y = xy' - 2\sqrt{y'} + 1, \qquad y = (1+x)y' + (y')^2.$$

Equazioni esatte:

$$x + y^2 + (2xy + 2y^3)y' = 0, \qquad y' = \frac{x - 3y}{3x + y}.$$

[10.3.2004]

Equazione da risolvere per sostituzione:

$$(y - x)(y' - 1) = [(y - x)^2 + 1] \log x.$$

Equazioni del secondo ordine:

$$y'' = \frac{y'}{x} + 1, \qquad \begin{cases} y'' = y^2(y')^3 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Studio qualitativo delle soluzioni

$$\begin{cases} y' = y(y - \arctan x)^2 \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

[17.3.2004]

Studio qualitativo delle equazioni differenziali

$$y' = \log y, \qquad y' = (y - 1) \arctan y$$

$$y' = y(y + x), \qquad \begin{cases} y' = 1 - x^2y^2 \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

[30.3.2004]

Correzione compitino

[31.3.2004]

Breve studio dell'equazione differenziale $y'' = -\sin y$ (moto del pendolo). Integralii curvilinei di funzioni. Teorema di Rettificabilità. Calcolare $L(\gamma)$:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [\pi/6, 5\pi/6]; \qquad \gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}), \quad t \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2].$$

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, ds \qquad \gamma(t) = (t \cos t, t \sin t), \quad t \in [0, 1].$$

Calcolare il baricentro della curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [\pi/6, 5\pi/6];$$

---[2.4.2004]

Forme differenziali chiuse e esatte, integrale di una forma lungo una curva. In particolare dire se le seguenti forme differenziali sono chiuse e/o esatte:

$$\omega_1 = -y\,dx + \sin x\,dy, \qquad \omega_2 = xy\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy$$
$$\omega_3 = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(y\,dx - x\,dy), \qquad \omega_4 = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Calcolare gli integrali $\int_{\gamma_1} \omega_2$, $\int_{\gamma_2} \omega_2$, $\int_{\gamma_3} \omega_4$ e $\int_{\gamma_4} \omega_4$. Dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t, 1), & t &\in [0, 2];\\
\gamma_2(t) &= (t, (t-1)^2), & t &\in [0, 2];\\
\gamma_3(t) &= (r\cos t, r\sin t), & t &\in [\alpha, \beta];\\
\gamma_4(t) &= (t\cos\alpha, t\sin\alpha), & t &\in [a, b].
\end{aligned}$$

---[6.4.2004]

Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

e

$$\gamma(t) = ((2 + 6\cos t)\sin t, 12 + 9\sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Fare lo stesso quando

$$\gamma(t) = (1 + t^2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \qquad t \in [-1, 1].$$

---[6.4.2004]

Calcolare $\int_{\gamma_k} \omega$ dove

$$\omega = \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2 + y^2} - \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

e

$$\gamma_2(t) = (1+\cos t, \sin t), \quad \gamma_3(t) = (3+5\cos t, \sin t), \quad \gamma_1(t) = (\cos\frac{t}{2}, t^2-2\pi t+2).$$

Videoproiezione: visualizzazione della risoluzione numerica di problemi di Cauchy e di integrali curvilinei.

____[21.4.2004]

Calcolare i seguenti integrali con entrambe le formule di riduzione (rispetto a x e rispetto a y)

$$\iint_D x^2(y-1)\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y)\colon -1 \le x \le 1,\ x^2-2 \le y \le 2-x^2\} \qquad \left[\text{soluzione: } -\frac{28}{15}\right]$$

$$\iint_D (4y^3+2xy)\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y)\colon |x|-1 \le y \le \sqrt{1-x^2}\} \qquad \left[\text{soluzione: } \frac{2}{3}\right].$$

Calcolare il baricentro del tetraedro:

$$P = \{(x,y,z)\colon x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x+y+z \le 1\} \qquad \left[\text{soluzione: } \frac{1}{4}\right].$$

Calcolare

$$\iint_{B_1} (x-1)^3\,dx\,dy \qquad B_1 = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1\} \qquad \left[\text{soluzione: } -\frac{7}{4}\pi\right].$$

____[27.4.2004]

Formula del cambiamento di variabili negli integrali multipli. Posto

$$D = [0,1] \times [0,1], \qquad \Phi(u,v) = (u^3+u+v, u^3+u-v)$$

Mostrare che Φ è invertibile e calcolare

$$\iint_{\Phi(D)} (x-y)\,dxdy$$

utilizzando la formula di cambiamento delle variabili.

Calcolare

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} 2y^2\,dxdy$$

dove

$$\Omega_\varepsilon = \{(x,y)\colon x > 0, \varepsilon \le xy \le 1, 1 \le y/x \le 2\}$$

e $\varepsilon \in (0,1)$ è un parametro fissato.

____[5.5.2004]

Coordinate polari. Calcolare

$$\iint_B (x-1)^3\,dxdy, \qquad \iint_A \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

dove $B = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \le 1\}$ e $A = \{(x,y) \colon 0 \le y \le \sqrt{3}x,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

Calcolare

$$\iint_C x^2 \, dxdy$$

dove C è l'interno della "cardioide" rappresentata in coordinate polari dalla curva $\rho = 1 + \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

[12.5.2004]

Calcolare, scambiando gli integrali,

$$\int_1^2 \frac{1}{y} \int_y^2 \frac{1}{\log x} \, dx \, dy.$$

Coordinate cilindriche: calcolare

$$\iiint_C (x^2 + y^2) z \, dxdydz$$

sul cilindro $C = \{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\}$. Coordinate sferiche: calcolare il baricentro di una semisfera.