

# Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi III modulo

a.a. 2003-2004

---

[1.10.2003]

Una successione  $f_k$  converge uniformemente a  $f$  sull'intervallo  $I$  se vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| = 0.$$

Studio della convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni

$$x^k, \quad \arctan(kx), \quad \arctan(x/k).$$

---

[8.10.2003]

Se  $f_k \rightarrow f$  e  $g_k \rightarrow g$  uniformemente, allora,  $f_k + g_k \rightarrow f + g$  uniformemente.

Studio della convergenza puntuale e uniforme delle successioni di funzioni

$$\frac{kx}{1+k^2k^2}, \quad \frac{\sin x}{ke^x} + \frac{k}{1+(x-k)^2}.$$

Studio della convergenza della serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$$

mostrando in particolare che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

---

[15.10.2003]

Verifica della convergenza (scambio del limite con la derivata)

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Verifica dei seguenti limiti (scambio del limite con l'integrale)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin^k x \, dx = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[k]{\sin x} \, dx = 1.$$

Studio della convergenza puntuale e uniforme delle serie (tratte da Cecconi-Piccinini-Stampacchia)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{x+1}{x^2+1} \right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{1+\sqrt{x}}{x-2} \right)^n.$$

---

[22.10.2003]

La funzione  $p(x, y) = xy$  è continua in  $\mathbb{R}^2$  (e anche  $s(x, y) = x + y$  lo è).

Se  $|f(x) - y_0| \leq g(|x - x_0|)$  ( $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ ) e se  $g(\rho) \rightarrow 0$  per  $\rho \rightarrow 0^+$  ( $\rho \in \mathbb{R}$ ) allora  $f(x) \rightarrow y_0$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Se  $f(x) \rightarrow y_0$  per  $x \rightarrow x_0$  ( $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ ) e se  $x_k \rightarrow x_0$  allora  $f(x_k) \rightarrow y_0$  per  $k \rightarrow \infty$ .

Verifica del seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^6 + y^8}}{x^2 + y^2} = 0.$$

Verifica che il seguente limite non esiste:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Studio dei seguenti limiti (per casa)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \sqrt{|x|y} + xy}{|x| + 2|y|},$$
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 2xy}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \sqrt{|x|y} + xy}{|x| + y^2}$$

(i primi due limiti valgono zero, i secondi due non esistono).

---

[29.10.2003]

Esercizi sui limiti:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{|x| + |y|} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{12}}{x+y} \text{ non esiste.}$$

Posto

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } |y| \leq x^2 \\ \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } |y| > x^2 \end{cases}$$

verificare che  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Verificare che (attenzione al dominio di definizione)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{y^2 - |x|}}{\sqrt{|y|}} = 0.$$

Studio della continuità della derivabilità e della differenziabilità nel punto  $(0, 0)$ , al variare del parametro  $\alpha > 0$  della seguente funzione (Pagani-Salsa):

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e anche la seguente (per casa)

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z^4(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

---

[5.11.2003]

Calcolare derivate prime e seconde della funzione  $f(x, y) = xe^{2y}$ . Calcolare le derivate seconde miste della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e verificare che le derivate seconde non sono continue in  $(0, 0)$ .

Calcolare tutte le derivate direzionali nel punto  $(0, 0)$  della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin(2 \arctan \frac{y}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

verificando che la funzione non è differenziabile in tale punto. Per casa: mostrare che la funzione  $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^2$ .

Calcolare le derivate direzionali (quando esistono) nel punto  $(0, 0, 0)$  della funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z^4 \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Mostrare che per ogni  $\alpha < 0$  non esiste il limite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{z^4(x^2 + y^2)^\alpha}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Data la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ x & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

dimostrare che  $f$  è continua e dire in quali punti è derivabile e in quali punti è differenziabile.

Mostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^2}{x^2 + |y|} = 0.$$

Posto

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

verificare che per ogni  $m$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = 0$$

ma  $f(x, y)$  non ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Posto

$$f(x, y) = \frac{y}{e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{\frac{1}{x^2}} y^2}$$

verificare che per ogni  $m$  e  $n$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt^n) = 0$$

e nonostante questo  $f(x, y)$  non ammette limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Panoramica su: gradiente, curve di livello, punti critici, matrice hessiana.

Videoproiezione di alcuni grafici di funzioni in due variabili.

Il teorema di Weierstraß, condizione necessaria verificata dai massimi e minimi relativi.

Trovare massimi e minimi assoluti della funzione  $f(x, y) = x + y$  sul dominio  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Trovare massimi e minimi assoluti della funzione  $f(x, y) = 2x^2y - x - y$  sul dominio  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ .

---

[3.12.2003]

Trovare massimi e minimi relativi della funzione  $f(x, y) = 2x^2y - x - y$  sul dominio  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Determinare i punti critici della funzione  $f(x, y) = (x + y)e^{-x^2y}$  e dire se sono massimi o minimi relativi.

---

[10.12.2003]

Determinare il carattere dei punti critici delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^3,$$

$$f(x, y) = 2y^4 - 2xy^3 + 5x^2.$$

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + 1.$$

Soluzione generale dell'equazione lineare omogenea di ordine 2 a coefficienti costanti.