Analisi Matematica IV modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2003-2004

21 maggio 2004

1. Si consideri la forma differenziale ω definita sull'aperto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dall'espressione
$$\omega = \frac{y^3\,dx - 3xy^2\,dy}{x^2+y^6}.$$
   (a) Dire se ω è chiusa in A.
   (b) Dire se ω è esatta in A.
   (c) Calcolare $\int_\gamma \omega$ sulla circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   Soluzione. Si ha $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ con
$$a(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^6}, \qquad b(x,y) = \frac{-3xy^2}{x^2+y^6}.$$
   Essendo
$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{3y^2(x^2+y^6) - y^3 6y^5}{(x^2+y^6)^2} = \frac{3x^2y^2 - 3y^8}{(x^2+y^6)^2}$$
   e
$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{-3y^2(x^2+y^6) + 3xy^2 2x}{(x^2+y^6)^2} = \frac{3x^2y^2 - 3y^8}{(x^2+y^6)^2}$$
   si nota che $a_y = b_x$ e quindi la forma ω è chiusa.

   Consideriamo ora la curva $\phi(t) = (\cos t, \sqrt[3]{\sin t})$, $t \in [0, 2\pi]$. Tale curva è continua, è chiusa (infatti $\phi(0) = \phi(2\pi)$) ed è contenuta nel dominio A (in quanto per ogni t si ha $\phi(t) \neq (0,0)$). Se ω fosse esatta su A si dovrebbe avere quindi $\int_\phi \omega = 0$. Essendo invece
$$\begin{aligned}\int_\phi \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t(-\sin t) - 3\cos t\sqrt[3]{\sin^2 t}\frac{1}{3}(\sin t)^{-\frac{2}{3}}\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t\,dt = -2\pi\end{aligned}$$
   deduciamo che ω non è esatta.

   Inoltre possiamo affermare che $\int_\gamma \omega = \int_\phi \omega = -2\pi$ in quanto la curva ϕ, come la curva γ, compie un giro in senso antiorario attorno all'origine $(0,0)$.

   Per essere più precisi possiamo costruire due curve α e β definite per $t \in [0, 2\pi]$ in questo modo
$$\alpha(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{per } t \in [0,\pi] \\ \phi(2\pi - t) & \text{per } t \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad \beta(t) = \begin{cases} \phi(\pi - t) & \text{per } t \in [0,\pi] \\ \gamma(t) & \text{per } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Si nota che la curva α è una curva continua in quanto $\gamma(\pi) = \phi(\pi)$ ed è chiusa in quanto $\gamma(0) = \phi(0)$. Inoltre tale curva è contenuta nell'insieme $A^+ = \{y \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}$. Essendo ω chiusa ed essendo A^+ semplicemente connesso se ne deduce che ω è esatta su A^+ e quindi che $\int_\alpha \omega = 0$. Discorso analogo si può fare per β trovando quindi $\int_\beta \omega = 0$. Notiamo ora che

$$\int_\gamma \omega - \int_\phi \omega = \int_{\gamma_{|[0,\pi]}} \omega - \int_{\phi_{[0,\pi]}} \omega + \int_{\gamma_{|[\pi,2\pi]}} \omega - \int_{\phi_{[\pi,2\pi]}} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega = 0$$

giustificando quindi l'affermazione $\int_\gamma \omega = \int_\phi \omega$ fatta in precedenza.

2. Dopo averlo disegnato, calcolare l'area del dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dal segmento $\overline{PQ}$ di estremi $P = (-3\pi, 0)$, $Q = (-\pi, 0)$ e dal tratto di spirale di Archimede $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t)$ con gli stessi estremi.

Soluzione. Il disegno del dominio D è riportato in figura. Per calcolare l'area notiamo che D si può rappresentare in coordinate polari dal dominio normale $\theta \in [\pi, 3\pi]$, $0 \leq \rho \leq \theta$. Dunque si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_\pi^{3\pi} \int_0^\theta \rho\,d\rho\,d\theta = \int_\pi^{3\pi} \frac{1}{2}\theta^2\,d\theta \\ &= \frac{1}{6}[\theta^3]_\pi^{3\pi} = \frac{27\pi^3 - \pi^3}{6} = \frac{13}{3}\pi^3.\end{aligned}$$