

Esercizi

14 ottobre 2002

1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ dire quante soluzioni ha il seguente sistema

$$\begin{cases} x + \alpha y = \alpha \\ \alpha x + y = \alpha^2 \end{cases}$$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Z})$ definita da

$$f(a) = \{b \in \mathbf{Z} : \exists c \in \mathbf{Z} \quad bc = a\}.$$

Dire se f è iniettiva e se è surgettiva.

3. (a) Provare che

$$\sin(5\alpha) = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha.$$

- (b) Trovare tutte le soluzioni di

$$x^5 - 20x^3 + 5x = 0.$$

- (c) Mostrare che il lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio unitario ha lunghezza pari a

$$\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

4. Mostrare che l'insieme

$$A = \{x \in \mathbf{R} : \exists n \in \mathbf{N} \quad x^n \in \mathbf{N}\}$$

è numerabile.

5. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \left| \left| |x - 2| - 2 \right| - 1 \right|.$$