Esercizi sulla formula di Taylor

6 maggio 2003

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x \sin x^3}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x\cos x}{\sqrt{\tan^3 x^2}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{6(\sin x - x)^3 + 16x(\cos x - 1)^4}{x^2 \tan(x^9)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \cos x - e^x + 2 + x^3/3}{2\log(1+x) + e^x \sin x - 3\tan x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + x^4) - \sin(x - x^4)}{\cos(x^2) - \cos(x^3)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log(\cos x) + x\sin x}{x^3}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\arctan(1/x)) - 1}{x^2},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{24e^{x^2} - 24\cos x - 36x\sin x - 17x^4}{(\cos x - e^x)^2},$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{2e^\pi \sin x - e^x - \pi e^\pi(\log x - \log \pi) + e^\pi}{(x-\pi)\sin x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\arctan(e^{x^2} - 1) - x^3}{(x - \sin x)(1 - \cos x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{\cos(e^x - 1 - \sin x) - 1}.$$

2. Supponiamo che per $x \to x_0$ si abbia

$$f(x) = g(x) + o(g(x))$$

   dove g è una funzione continua che si annulla solamente per $x = x_0$.

   Mostrare allora che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso segno.

3. Dire se il punto $x = 0$ è di massimo o minimo relativo per la funzione

$$f(x) = x(6\sin x - 6x + x^3)(2\cos x - 2 + x^2) + x^2(e^{x^4} - 1 - x^4).$$

Modifiche:
9 maggio 2003: ho corretto il limite alla sesta riga che risultava banale e ho aggiunto il secondo esercizio che dovrebbe aiutare a risolvere il terzo.
4 maggio 2005: nel secondo esercizio ho aggiunto l'ipotesi di continuità per g. *12 maggio 2005*: il nono limite va calcolato per $x \to 0^+$, altrimenti non esiste.