Analisi Matematica II modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

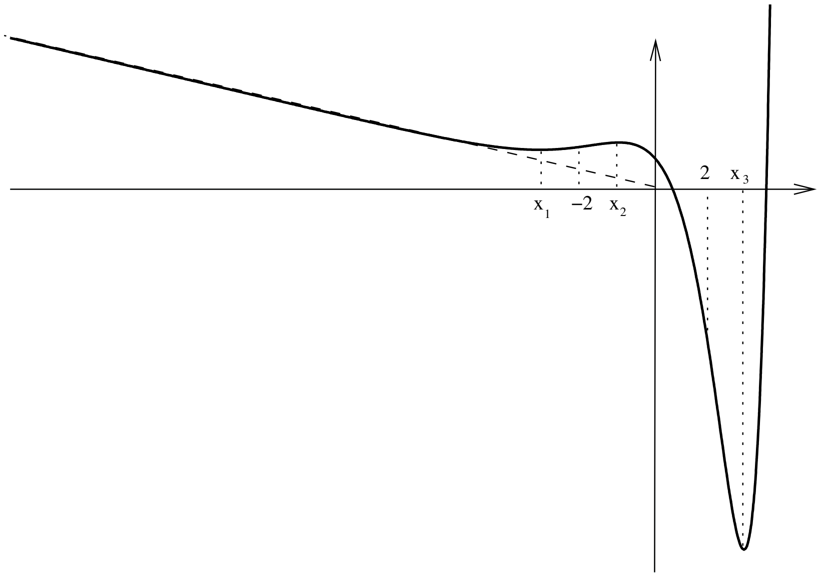
20 marzo 2003

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico
$$f(x) = (x^2 - 4x + 2)e^x - \frac{x}{2}.$$

   Soluzione. Il dominio di f è $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda il comportamento agli estremi del dominio si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) + \frac{x}{2} = 0$$
   dunque c'è un asintoto obliquo di equazione $y = -x/2$ per $x \to -\infty$. La funzione attraversa l'asintoto per i valori $x = 2 \pm \sqrt{2}$ e rimane al di sopra dell'asintoto quando x assume valori esterni a questi.

   Studiamo le derivate prima e seconda. Si ha
$$f'(x) = (x^2 - 2x - 2)e^x - \frac{1}{2}, \quad f''(x) = (x^2 - 4)e^x.$$
   Dunque i punti $x = \pm 2$ sono punti di flesso, la funzione è convessa nell'intervallo $[-2, 2]$ e concava al di fuori di questo intervallo.

   La funzione f' assumerà invece un minimo locale per $x = -2$ e un minimo locale per $x = 2$. Si ha inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\frac{1}{2}, \quad f'(-2) = 6e^{-2} - \frac{1}{2} > \frac{6}{9} - \frac{1}{2} > 0,$$
$$f'(0) = -\frac{5}{2} < 0, \quad f'(2) = -2e^2 - \frac{1}{2} < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.$$
   Dunque la derivata prima $f'(x)$ si annulla in esattamente tre punti x_1, x_2, x_3 ordinati in questo modo
$$x_1 < -2 < x_2 < 0 < 2 < x_3.$$



La funzione $f(x)$ assume quindi un minimo locale per $x = x_1$, un massimo locale per $x = x_2$ e un minimo locale per $x = x_3$. Inoltre essendo $f(x) > -x/2$ per $x < 2 - \sqrt{2}$ si ha $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) > 0$. Si ha poi $f(0) = -2$ e quindi $f(x_3) < 0$.

Complessivamente il grafico di f è quello rappresentato in figura

2. Dire se la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ è Lipschitziana e se è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

   Soluzione. Posto $x_k = \sqrt{\pi/2 + 2k\pi}$ $y_k = \sqrt{3\pi/2 + 2k\pi}$ si verifica facilmente che $|x_k - y_k| \to 0$ ma $|f(x_k) - f(y_k)| = 2$. Dunque f non è uniformemente continua e di conseguenza non è lipschitziana.

3. Calcolare mediante la definizione (metodo di esaustione) l'integrale
$$\int_0^1 (4 - x)\, dx.$$

   Soluzione. Per $k = 0, \ldots, N$ definiamo $x_k = k/N$. Questi punti dividono l'intervallo $[0, 1]$ in N intervallini $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ di ampiezza $x_{k+1} - x_k = 1/N$. Relativamente a questa partizione dell'intervallo $[0, 1]$ possiamo facilmente calcolare le somme superiori S_N e inferiori s_N notando che (essendo $f(x) = 4 - x$ decrescente) si ha $\inf_{I_k} f(x) = f(x_{k+1})$ e $\sup_{I_k} f(x) = f(x_k)$. Infatti (ricordiamo che la somma di una progressione aritmetica è data dalla media tra il primo e l'ultimo termine moltiplicata per il numero di termini)
$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(x_k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (4 - x_k) = \frac{1}{N} \frac{4 - x_0 + 4 - x_{N-1}}{2} N$$

$$= \frac{4 - 0 + 4 - (N-1)/N}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{N}$$

e

$$s_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(x_{k+1}) = \dots = \frac{4 - 1/N + 4 - N/N}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{N}.$$

Dunque si ha $S_N \to 7/2$ e $s_N \to 7/2$. Questo significa che la funzione è integrabile e l'integrale cercato è pari a $7/2$.

4. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \log(e^x - x).$$

Soluzione. Posto $g(x) = e^x - x$ si ha $g'(x) = e^x - 1$. Dunque g ha minimo assoluto nel punto $x = 0$ e di conseguenza $g(x) \geq g(0) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dunque l'argomento g del logaritmo è sempre positivo (anzi maggiore o uguale ad 1) e quindi il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$ (e la funzione è non negativa).

Studiamo il comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Possiamo essere però più precisi notando che (si sfruttino le identità $f(x) = \log(-x) + \log(1 - e^x/x)$ e $f(x) = x + \log(1 - x/e^x)$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - \log(-x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$$

cioè la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$ per $x \to +\infty$ e tende "asintoticamente" alla funzione $y = \log(-x)$ per $x \to -\infty$. È poi interessante notare che $f(x) > \log(-x)$ per ogni $x < 0$ e $f(x) < x$ per ogni $x > 0$.

Studiamo le derivate della funzione. Si ha

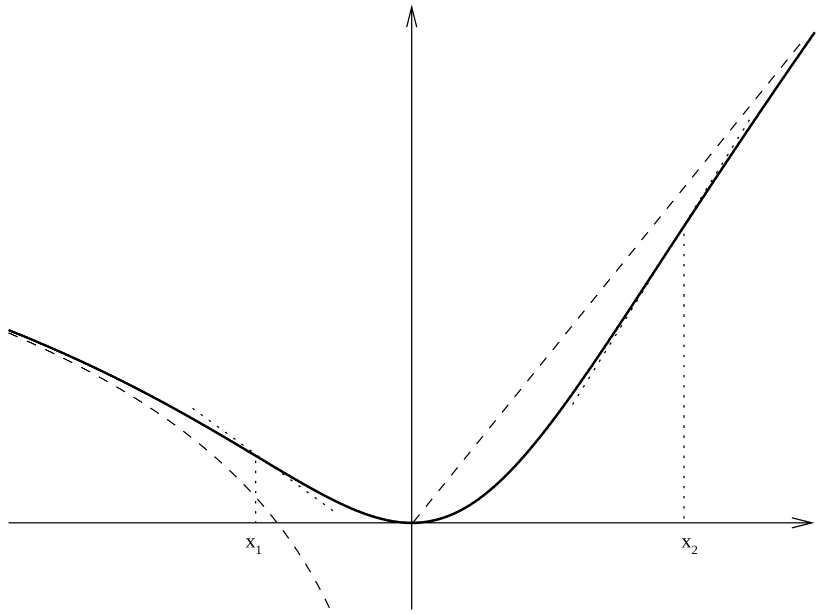
$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{x^x - x}, \quad f''(x) = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}.$$

Dunque la funzione f ha un minimo assoluto in $x = 0$ ($f(0) = 0$) ed è crescente (risp. decrescente) per $x \geq 0$ (risp. $x \leq 0$).

Studiamo anche la derivata seconda. Posto $h(x) = (2-x)e^x - 1$ si ha $h'(x) = (1-x)e^x$. Dunque h ha massimo assoluto per $x = 1$ ed è crescente su $\{x \leq 1\}$ e decrescente su $\{x \geq 1\}$. Essendo $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -1$, $h(0) > 0$ e $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ la funzione h si annulla in esattamente due punti x_1 e x_2 con $x_1 < 0$ e $x_2 > 1$.

I punti x_1 e x_2 sono dunque gli unici punti di flesso per f.

Il grafico di f si potrà dunque rappresentare come segue.



5. Dire se la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$ è Lipschitziana e se è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

   Soluzione. Se la funzione fosse Lipschitziana si avrebbe

   $$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| \leq L$$

   e quindi il limite

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

   se esiste dovrebbe essere finito. D'altra parte questo limite si può calcolare facilmente e risulta invece essere pari a $+\infty$. Dunque la funzione non può essere lipschitziana.

   Mostriamo che la funzione è invece uniformemente continua. Consideriamo la funzione $g(x) = \sin(x)$. Essendo $|g'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$ si ha che g è lipschitziana di costante di lipschitz pari a 1. Cioè

   $$\forall x, x' \in \mathbb{R} \quad |\sin(x) - \sin(x')| \leq |x - x'|.$$

   Posto poi $h(y) = \sqrt[3]{y}$ sappiamo, per il teorema di Cantor, che h è uniformemente continua nell'intervallo $y \in [-1, 1]$ cioè

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad |y - y'| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y'}| < \varepsilon.$$

   Mettendo insieme le affermazioni fatte si ottiene

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x'| < \delta \Rightarrow |\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x'}| < \varepsilon$$

che è proprio la definizione di uniforme continuità per la funzione f.

In alternativa si può dimostrare (per verifica diretta) che vale

$$\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y'} \leq \sqrt[3]{|y-y'|}$$

e che vale

$$|\sin(x) - \sin(x')| \leq |x - x'|.$$

Dunque si ottiene

$$|f(x) - f(x')| \leq \sqrt[3]{|x-x'|}.$$

Essendo $\lim_{t\to 0^+} \sqrt[3]{t} = 0$ se ne deduce che f è uniformemente continua.

6. Calcolare mediante la definizione (metodo di esaustione) l'integrale

$$\int_0^2 (1-x)\,dx.$$

Soluzione. Dividiamo l'intervallo $[0,2]$ in N parti mediante i punti $x_k = 2k/N$, $k = 0,\dots,N$. Ogni intervallino $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ ha ampiezza $x_{k+1} - x_k = 2/N$. Notiamo che (essendo f decrescente) si ha $\sup_{I_k} f(x) = f(x_k)$ e $\inf_{I_k} f(x) = f(x_{k+1})$. Dunque per le somme superiori S_N e inferiori s_N su questa partizione si ottiene

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{N} f(x_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{2k}{N}) = \frac{2}{N}\frac{1-0/N+1-2(N-1)/N}{2}N = \frac{2}{N}$$

e

$$s_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{N} f(x_{k+1}) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(1-\frac{2(k+1)}{N}) = \frac{2}{N}\frac{1-2/N+1-2N/N}{2}N = -\frac{2}{N}.$$

Essendo $S_N \to 0$ e $s_N \to 0$ ne deduciamo che la funzione è integrabile e l'integrale in questione è pari a 0.