Analisi Matematica I modulo
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

13 gennaio 2003

1. (a) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{1+n^2}.$$
   (b) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{1+n^2}).$$

   Soluzione.

   (a) Si ha
$$n - \sqrt{1+n^2} = \frac{n^2-(1+n^2)}{n+\sqrt{1+n^2}} = \frac{-1}{n+\sqrt{1+n^2}} \to 0$$
   per $n \to \infty$.

   (b) Si ha
$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{1+n^2}) &= \sin(\pi n + \pi(\sqrt{1+n^2}-n))\\ &= \sin(\pi n)\cos(\pi(\sqrt{1+n^2}-n)) + \sin(\pi(\sqrt{1+n^2}-n))\cos(\pi n)\\ &= (-1)^n \sin(\pi(\sqrt{1+n^2}-n)) \to 0.\end{aligned}$$
   Notiamo infatti che $\sin(\pi n) = 0$ in quanto n è intero, mentre $\cos(\pi n) = (-1)^n$ è limitata e $\sin(\pi(\sqrt{1+n^2}-n)) \to 0$ per quanto visto al punto precedente.

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x - x^2 + x$.

   (a) Studiare la convessità e la monotonia di f.

   (b) Mostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$f(x) = y$$
   ha una e una sola soluzione $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Verificare che $|f(x_1) - f(x_2)| \geq |x_1 - x_2|$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

(a) Si ha $f'(x) = e^x - 2x + 1$ e $f''(x) = e^x - 2$. Dunque $f''(x) \geq 0$ se $x \geq \log 2$; cioè f è convessa sull'intervallo $\{x \geq \log 2\}$ ed è concava su $\{x \leq \log 2\}$. Inoltre dalla studio di f'' si deduce che f' ha minimo assoluto in $\log 2$. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x) \geq f'(\log 2) = 2 - 2\log 2 + 1 > 2 - 2 + 1 = 1$. In particolare $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ da cui si conclude che f è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Siccome f è strettamente crescente è anche iniettiva. Inoltre essendo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ed essendo f continua, dal teorema di esistenza dei valori intermedi ricaviamo che f è surgettiva. Dunque per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$.

(c) Dati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ per il Teorema di Lagrange sappiamo esistere un punto x tale che

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x).$$

Ricordando poi che $f'(x) \geq 1$ e applicando il valore assoluto ad ambo i membri otteniamo:

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = |f'(x)| = f'(x) \geq 1$$

da cui si ricava la disuguaglianza desiderata.
Se $x_1 = x_2$ il risultato è ovvio.