Esercizi di ricapitolazione

12 dicembre 2002

1. Determinare il numero di soluzioni delle seguenti equazioni
$$10 \arctan x = 7 + x, \quad e^x + 2 \arctan x = 7, \quad x^{17} + x^{13} + 1 = 0.$$

2. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbf{R}$ vale
$$e^{x^2} \geq 1 + x^2, \quad x^2 + \cos x - 1 \geq 0, \quad \log(1 + x^2) \leq |x|.$$

3. Siano $f, g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$. Mostrare che
   (a) se $f(x_0) \geq g(x_0)$ e si ha $f'(x) \geq g'(x)$ per ogni $x \geq x_0$ allora $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \geq x_0$;
   (b) se $f(x_0) \geq g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$ e per ogni $x \geq x_0$ si ha $f''(x) \geq g''(x)$ allora per ogni $x \geq x_0$ si ha $f(x) \geq g(x)$.

4. È più grande e^π oppure π^e?
   È più grande $\sqrt[13]{\frac{13}{12}} + \sqrt[17]{\frac{12}{13}}$ oppure $\sqrt[13]{\frac{17}{16}} + \sqrt[17]{\frac{16}{17}}$?

5. Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2 & \text{se } |x| > 1 \\ 0 & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$
   Mostrare che f è convessa.

6. Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \geq x^2$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Mostrare che esiste un punto ξ tale che $f''(\xi) \geq 1$.

7. Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che $f'(x) > \epsilon$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Si può concludere che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

8. Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$. Si può concludere che $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$?

9. Sia f una funzione convessa definita su un intervallo I. Mostrare che per ogni $t \in [0, 1]$ e ogni $x, y \in I$ si ha
$$f(tx + (1 - t)y) \leq t f(x) + (1 - t) f(y).$$

10. Mostrare che per ogni $a, b > 0$ si ha [utilizzare la convessità di $1/x$]
$$\frac{a + b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$
    Mostrare che dati $a, b > 0$, $p, q > 0$ con $1/p + 1/q = 1$ si ha [utilizzare la concavità di $\log x$]
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

11. Provare il seguente notevole teorema. Sia $f\colon]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to \mathbf{R}$ continua. Se f è derivabile in ogni punto $x \neq x_0$ ed esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x) = m$ allora f è derivabile in x_0 e vale $f'(x_0) = m$.