Analisi Matematica Due, primo modulo
Soluzioni della prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

14 febbraio 2002

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } |y| \le x^2 \\ \\ x^2+x & \text{se } |y| > x^2 \end{cases}$$

   (a) In quali punti f non è continua?

   (b) In quali punti non è differenziabile?

   Soluzione. Poniamo $A_1 = \{(x,y) : |y| < x^2\}$, $A_2 = \{(x,y) : |y| > x^2\}$, $f_1(x,y) = x+y$, $f_2(x,y) = x^2+x$. La funzione f risulta essere continua e differenziabile su A_1 e su A_2 in quanto conincide, su tali insiemi, con le funzioni f_1 e f_2 che sono senza dubbio continue e differenziabili. Essendo A_1 e A_2 aperti, la funzione f risulta dunque continua e differenziabile sull'unione $A = A_1 \cup A_2$.

   Rimane da studiare la funzione sulle due parabole $y = x^2$ e $y = -x^2$. Sulla curva $y = x^2$ la funzione risulta essere continua in quanto le due funzioni f_1 e f_2 hanno lo stesso limite nei punti di tale curva e la funzione f (sulla curva) coincide con tale limite. Sulla curva $y = -x^2$, invece, se $x \neq 0$ le due funzioni hanno limiti diversi e quindi la funzione f in tali punti non è continua.

   Per quanto riguarda la differenziabilità, notiamo innanzitutto che la funzione non può essere differenziabile su $y = -x^2$, $y < 0$ in quanto in tali punti non è nemmeno continua. Anche sui punti $y = x^2$, $y > 0$ la funzione non è differenziabile in quanto non esiste (ad esempio) la derivata parziale rispetto a y. Infatti si ha per $x \neq 0$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x, x^2+h) - f(x,x^2)}{h} = (f_2)_y(x,x^2) = 0,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x, x^2+h) - f(x,x^2)}{h} = (f_1)_y(x,x^2) = 1.$$

Verifichiamo invece che la funzione è differenziabile nel punto $(0,0)$. Innanzitutto calcoliamo le derivate parziali

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(h,0)-f_1(0,0)}{h} = (f_1)_x(0,0) = 1;$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f_2(0,h)-f_2(0,0)}{h} = (f_2)_y(0,0) = 0.$$

Verifichiamo infine che la funzione è differenziabile, infatti

$$\left| \frac{f(h,k)-h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \left| \frac{\begin{cases} k & \text{se } |k| \le h^2 \\ h^2 & \text{se } |k| > h^2 \end{cases}}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \quad \text{per } (h,k) \to (0,0).$$

In conclusione la funzione data risulta continua sull'insieme $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = -x^2,\ x \neq 0\}$ e differenziabile sull'insieme $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : |y| = -x^2,\ x \neq 0\}$.

2. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (y+e^x)^3 - 3(y+e^x)$$

e stabilire se sono punti di massimo o minimo relativo.

Soluzione. Notiamo che $f = g \circ h$ dove $h(x,y) = y + e^x$ e $g(t) = t^3 - 3t$. Cerchiamo i punti in cui si annullano le derivate parziali di f (sapendo che $g'(t) = 3(t^2-1)$):

$$f_x(x,y) = g'(h(x,y))h_x(x,y) = 3(h^2(x,y)-1)h_x(x,y),$$
$$f_y(x,y) = g'(h(x,y))h_y(x,y) = 3(h^2(x,y)-1)h_y(x,y).$$

Notiamo che $h_x = e^x$ e $h_y = 1$ non si annullano mai, dunque i punti critici di f si avranno quando $h(x,y) = \pm 1$ essendo $t = \pm 1$ i punti in cui si annulla $g'(t)$.

Se proviamo a calcolare il determinante Hessiano nei punti critici troveremmo sempre 0, quindi dobbiamo trovare un metodo alternativo per studiare la natura di questi punti critici.

Studiamo il segno della derivata parziale $f_y = 3(h^2-1)h_y$. Essendo $h_y > 0$ si avrà che $f_y \ge 0$ quando $h^2 - 1 \ge 0$ ossia quando $y \ge 1 - e^x$ o quando $y \le -1 - e^x$. Consideriamo ora un punto (x_0, y_0) tale che $y_0 = 1 - e^{x_0}$ e mostriamo che tale punto è un minimo relativo. Prendiamo dunque un qualunque punto (x,y) abbastanza vicino a (x_0,y_0) in modo che $y \ge -1 - e^x$. Dal teorema di Lagrange, per un certo $\xi \in]1-e^x, y[$, si ha

$$f(x,y) = f(x, 1-e^x) + f_y(x,\xi)\cdot(y-(1-e^x)) \ge f(x_0,y_0)$$

essendo $f(x, 1-e^x) = g(1) = f(x_0,y_0)$ ed avendo $f_y(x,\xi)$ lo stesso segno di $y - (1-e^x)$. Per i punti appartenenti alla curva $y = -1 - e^x$ si procede in modo analogo provando che tali punti sono di massimo relativo.

3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+\sqrt{k}\log k}.$$

Soluzione. Troviamo il raggio di convergenza della serie:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1+\sqrt{k}\log k}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \exp\left(-\frac{\log(1+\sqrt{k}\log k)}{k}\right) = 1.$$

Dunque la serie converge puntualmente nell'intervallo $]-1,1[$ e converge totalmente in ogni intervallo chiuso contenuto in $]-1,1[$. Non c'è convergenza puntuale per $|x| > 1$. Controlliamo se c'è convergenza nei punti $x = \pm 1$. Per $x = -1$ la serie è a segni alterni e il termine generico risulta essere decrescente (in valore assoluto) e infinitesimo. Dunque per $x = -1$ la serie converge. Per $x = 1$ notiamo che si ha

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{\frac{2}{3}}}{1+k^{\frac{1}{2}}\log k} = +\infty$$

ed essendo

$$\sum_k \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

anche la serie data diverge (per $x = 1$).