

# Analisi Matematica Due

## Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

17 dicembre 2001

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \sin x$$

e dire se sono massimi o minimi relativi.

*Soluzione.* Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali di  $f$ :

$$f_x(x, y) = 2x - 2y \cos x, \quad f_y(x, y) = 2y - 2 \sin x.$$

I punti critici sono quelli in cui si annullano entrambe le derivate parziali. Da  $f_y = 0$  otteniamo  $y = \sin x$  che sostituendo in  $f_x = 0$  ci dà  $0 = 2x - 2 \sin x \cos x = 2x - \sin(2x)$  che ha come unica soluzione  $x = 0$  (ricordiamo che  $-|t| \leq \sin t \leq |t|$ ). Dunque l'unico punto critico è il punto  $(0, 0)$ .

Per sapere se il punto è un massimo o un minimo relativo proviamo a calcolare la matrice delle derivate seconde nel punto critico

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2y \cos x & -2 \cos x \\ -2 \cos x & 2 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Siccome il determinante hessiano risulta nullo non otteniamo ulteriori informazioni dalle derivate seconde e dovremo utilizzare un metodo alternativo. Proponiamo due possibili soluzioni.

- (a) *Primo metodo.* Studiamo il luogo dei punti in cui si annulla la derivata parziale  $f_y$ . Tale luogo è la curva  $y = \sin x$ . Al di sopra di tale curva si ha  $f_y > 0$  e al di sotto si ha  $f_y < 0$  dunque rispetto alla direzione "verticale" la curva  $y = \sin x$  è formata da punti di minimo (assoluto). Studiamo l'andamento della funzione sulla curva, cioè studiamo la funzione  $g(x) = f(x, \sin x)$ . Si ha  $g(x) = x^2 + \sin^2 x - 2 \sin^2 x = x^2 - \sin^2 x$ , e  $g'(x) = 2x - 2 \sin x \cos x = 2x - \sin(2x)$ . Si verifica che  $g'(x)$  ha lo stesso segno di  $x$  cioè il punto  $(0, 0)$  è di minimo (assoluto) tra tutti i punti della curva  $y = \sin x$ . In conclusione il punto critico  $(0, 0)$  risulta quindi essere un minimo locale (anzi assoluto), in quanto preso un qualunque punto  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  si ha  $f(x, y) \geq f(x, \sin x) \geq f(0, 0)$ .

- (b) *Secondo metodo.* Proviamo a studiare il segno di  $f(x, y) - f(0, 0)$ . Ricordando che  $|\sin t| \leq |t|$  otteniamo

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 0) &= x^2 + y^2 - 2y \sin x \geq x^2 + y^2 - |2y \sin x| \\ &\geq x^2 + y^2 - 2|xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

vale a dire  $(0, 0)$  è un punto di minimo assoluto.

2. Si considerino le due successioni di funzioni

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + x^{2k}}, \quad g_k(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^{2k}}.$$

Si verifichi che

- (a) la successione  $f_k$  converge puntualmente ma non uniformemente su  $\mathbf{R}$ ;  
 (b) la successione  $g_k$  converge puntualmente e uniformemente su  $\mathbf{R}$ .

*Soluzione.*

- (a) Notando che  $x^{2k}$  converge a 0 se  $|x| < 1$ , diverge a  $+\infty$  se  $|x| > 1$  ed è costantemente 1 se  $|x| = 1$  si trova che la successione  $f_k$  converge puntualmente per ogni  $x \in \mathbf{R}$  alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1 \\ 1/2 & \text{se } |x| = 1 \\ 1 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Siccome tutte le funzioni  $f_k$  sono continue, se la convergenza fosse uniforme anche  $f$  dovrebbe essere continua, cosa che non è. Dunque non c'è convergenza uniforme su tutto  $\mathbf{R}$ .

- (b) Analogamente a prima notiamo che la successione  $g_k$  converge puntualmente alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

In questo caso il limite  $g$  è una funzione continua quindi non possiamo escludere che ci sia convergenza uniforme. Per provare che effettivamente c'è convergenza uniforme cerchiamo di trovare una stima uniforme della quantità  $|g_k(x) - g(x)|$ .

Se  $|x| \geq 1$  si ha

$$|g_k(x) - g(x)| = \frac{|1 - x^2|}{1 + x^{2k}} = \frac{x^2 - 1}{1 + x^{2k}} \leq \frac{x^2 - 1}{x^{2k}}$$

Dobbiamo quindi trovare il massimo della funzione  $\varphi(x) = (x^2 - 1)x^{-2k}$  sull'intervallo  $[1, +\infty[$  (la funzione è simmetrica quindi possiamo tralasciare il caso  $x \leq -1$ ). Studiando la derivata  $\varphi'(x) =$

$2xx^{-2k} - 2k(x^2 - 1)x^{-2k-1} = 2x^{-2k-1}[k - (k-1)x^2]$  si nota che la funzione assume massimo nel punto  $x = \sqrt{k/(k-1)}$  da cui si ottiene (per ogni  $x$  con  $|x| \geq 1$ )

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \varphi \left( \sqrt{\frac{k}{k-1}} \right) = \frac{\frac{k}{k-1} - 1}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k} = \frac{\frac{1}{k-1}}{\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^k}.$$

Notiamo ora che il denominatore dell'ultima uguaglianza tende al limite 'e' quando  $k \rightarrow \infty$ . Il numeratore invece tende a 0 e dunque si ottiene per confronto che  $|g_k(x) - g(x)|$  tende a 0 uniformemente per  $k \rightarrow \infty$  e  $|x| \geq 1$ .

Consideriamo ora i punti in cui  $|x| < 1$ . In questo caso si ottiene

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g(x)| &= \left| \frac{1-x^2}{1+x^{2k}} - (1-x^2) \right| = (1-x^2) \left( 1 - \frac{1}{1+x^{2k}} \right) \\ &= (1-x^2) \frac{x^{2k}}{1+x^{2k}} \leq (1-x^2)x^{2k}. \end{aligned}$$

Analogamente a prima studiamo la funzione  $\psi(x) = (1-x^2)x^{2k}$ . Si trova  $\psi'(x) = -2xx^{2k} + 2k(1-x^2)x^{2k-1} = 2x^{2k-1}[k - (1+k)x^2]$  e dunque si nota che la funzione assume il valore massimo nei punti  $x^2 = k/(k+1)$ . Dunque si ottiene la stima uniforme

$$|g_k(x) - g(x)| \leq \psi \left( \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) = \left( 1 - \frac{k}{k+1} \right) \left( \frac{k}{k+1} \right)^k$$

anche in questo caso il secondo fattore converge per  $k \rightarrow \infty$  al valore 'e' mentre il primo fattore tende a 0.

In conclusione la successione  $g_k$  converge uniformemente a  $g$  in entrambi gli insiemi  $\{|x| \geq 1\}$  e  $\{|x| < 1\}$  e dunque converge uniformemente a  $g$  su tutto  $\mathbf{R}$ .

3. Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2} \right).$$

- (a) Provare che la serie converge totalmente nell'intervallo  $[0, 1]$ .
- (b) Provare che la serie converge puntualmente nell'intervallo  $] -1, 1[$ .
- (c) (Facoltativo) Trovare esplicitamente la somma della serie.

*Soluzione.* Consideriamo il termine generico della serie:

$$f_k(x) = \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2}.$$

- (a) Si ha  $f'_k(x) = x^{2k} - x^{2k+1} = x^{2k}(1-x)$ . Dunque la funzione  $f_k$  è crescente per  $x < 1$  e  $f_k(0) = 0$ . Dunque per ogni  $x \in [0, 1]$  si trova

$$|f_k(x)| \leq f_k(1) = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Essendo la serie  $\sum \frac{1}{k^2}$  convergente si conclude che la serie di funzioni  $\sum f_k$  è totalmente convergente su  $[0, 1]$ .

- (b) Se  $|x| < 1$  notiamo che  $x^{2k+2}/(2k+2) < |x|^{2k+1}/(2k+1) < |x|^{2k+1}$  da cui ricaviamo

$$0 \leq f_k(x) \leq 2|x|^{2k+1}.$$

ma la serie  $\sum |x|^{2k+1}$  è convergente per  $|x| < 1$  e quindi la serie data è convergente per  $|x| < 1$ . Per  $x = 1$  la serie converge in quanto abbiamo già dimostrato che su tutto  $[0, 1]$  c'è convergenza totale. Dunque c'è convergenza puntuale su tutto  $] - 1, 1[$ .

- (c) Notiamo che la serie delle derivate converge puntualmente per  $x \in [0, 1]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}(1-x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = (1-x) \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}.$$

Inoltre la convergenza è uniforme su  $[0, 1-\varepsilon]$  per ogni  $\varepsilon > 0$  in quanto la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

ha raggio di convergenza  $\rho = 1$  e quindi converge uniformemente sull'intervallo  $[0, 1-\varepsilon]$ . Dunque sull'intervallo  $[0, 1-\varepsilon]$  la serie data e la sua derivata convergono entrambe uniformemente. Ne consegue che la somma  $f(x)$  della serie data ha come derivata  $f'(x) = 1/(1+x)$  per  $x \in [0, 1-\varepsilon]$ . Siccome  $f(0) = 0$  si trova che  $f(x) = \log(x)$  per  $x \in [0, 1-\varepsilon]$ . Essendo  $\varepsilon > 0$  arbitrario concludiamo che  $f(x) = \log(1+x)$  per ogni  $x \in [0, 1[$ . D'altra parte la serie data converge uniformemente su tutto l'intervallo  $[0, 1]$  quindi la funzione  $f$  deve essere continua su  $[0, 1]$ , l'unica possibilità è che  $f(x) = \log(1+x)$  per ogni  $x \in [0, 1]$ .