Derivata e differenziale

15 ottobre 2001

1. Sia $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Verificare che
$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

2. Sia $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Provare che f ammette derivate parziali in ogni punto ma non è continua nel punto $(0,0)$.

3. Verificare che la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da
$$\begin{cases} \frac{x^3+x^2y(y-1)+xy^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
è differenziabile.

4. Provare che la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = |xy|^\alpha$ è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha > 1/2$.

5. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Provare che f ammette derivate direzionali in ogni punto e per ogni direzione. Verificare che f non è differenziabile in $(0,0)$.

6. Si consideri la funzione $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da
$$\begin{cases} \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Studiare la continuità e la differenziabilità di f al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

7. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon |y| \leq |x|^3\}$ e sia $f \colon A \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y+x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Verificare inoltre che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y) = 0$$

e che invece non esiste il

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x, y).$$