

## 1 dicembre 1999

1. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, e siano  $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili. Posto

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$$

si provi che  $G$  è derivabile e che

$$G'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

2. Per ogni  $\epsilon > 0$  sia data  $g_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e tale che

- (a)  $|t| > \epsilon \Rightarrow g_\epsilon(t) = 0$ ;
- (b)  $\int_{\mathbb{R}} g_\epsilon(t) dt = 1$ ;
- (c)  $g_\epsilon(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Dimostrare che se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t)g_\epsilon(t) dt = f(0).$$

Provare inoltre che se le  $g_\epsilon$  e  $f$  sono funzioni derivabili con derivata continua, allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t)g'_\epsilon(t) dt = -f'(0).$$

3. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione crescente, e sia  $X \subset \mathbb{R}$  l'insieme dei punti in cui  $f$  non è continua. Dimostrare che l'insieme  $X$  è al più numerabile cioè che esiste una funzione iniettiva  $g: X \rightarrow \mathbb{N}$ . (Suggerimento: cercare una funzione iniettiva  $h: X \rightarrow \mathbb{Q}$ ).
4. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua con derivata continua tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Dire (giustificandolo) quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- (a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0;$$

- (b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (f(x) - l) dx = 0;$$

- (c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = l.$$