16 dicembre 1999

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$$

dire il più possibile sulla funzione f

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile su $\mathbb{R} - \{x_0\}$. Supponiamo inoltre che $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l$: allora f è derivabile anche in x_0 e $f'(x_0) = l$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}$, dimostrare che sono equivalenti:

1. f ha limite finito per x che tende a x_0
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall y_1, y_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $|f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f(0) = 0$. Dimostrare che esiste una funzione continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = xg(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Che cosa si può dire sulla differenziabilità di g? Come si può generalizzare questo risultato se $f \in C^k(\mathbb{R})$ e $f(0) = f'(0) = ... = f^{(k-1)}(0) = 0$?

Esercizio 5 Sia $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $V(x_0) = E_0$, $V'(x_0) = 0$ e $V''(x_0) > 0$.

1. Dimostrare che per E sufficientemente vicino a E_0 con $E > E_0$ l'equazione $V(x) = E$ in un intorno di x_0 ha esattamente due radici distinte $x^-(E) \leq x_0 \leq x^+(E)$
2. Calcolare il limite
$$\lim_{E \to E_0^-} \int_{x^-(E)}^{x^+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$$

Esercizio 6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare che per ogni intervallo $[a', b'] \subset (a, b)$ la funzione f ristretta a $[a', b']$ è lipschitziana e stimare la costante di Lipschitz . Questo implica che una funzione convessa su un intervallo limitato e chiuso è lipschitziana?