Esercizi 8 dicembre '99

i) Sia I un insieme (di indici) e $\forall i$ sia $X_i \subset \mathbb{R}$ non vuoto.

-Si dimostri che non e' vero in generale che

$$\sup_{i \in I} \inf X_i = \inf_{i \in I} \sup X_i \tag{1}$$

-Si dica in oltre se valgono

$$\sup_{i \in I} \inf X_i \leq \inf_{i \in I} \sup X_i \qquad \sup_{i \in I} \inf X_i \geq \inf_{i \in I} \sup X_i$$

-Se gli X_i sono intervalli chiusi non vuoti, si dia una condizione necessaria e sufficiente per cui valga 1.

ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $x \in \mathbb{R}$. $\forall i \in (0, +\infty)$ sia $J_i = \{f(y) : |y - x| < i\}$, si definiscano le seguenti funzioni $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$:

$$g(t) = \sup_{i<t} \inf J_i, \quad h(t) = \inf_{i<t} \sup J_i$$

Dimostrare che esistono $\lim_{x \to 0} g(x)$ e $\lim_{x \to 0} h(x)$, dire che relazioni sussistono tra i due limiti e provare che f e' continua in x se e solo se i limiti coincidono.

Dare una definizione analoga per $x = \infty$ e vedere cosa succede.

iii) Sia I un insieme (di indici) e $\forall i$ sia $X_i = (x_i^0, x_i^1) \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto non vuoto. Sapendo che $\forall i, j \in I, i \neq j$ si ha $X_i \cap X_j = \emptyset$, dimostrare che I e' un insieme numerabile.

iv) Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si definiscono

$$f \wedge g(x) = \inf\{f(x), g(x)\} \quad f \vee g(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

Dimostrare che se f e g sono continue, anche $f \wedge g$ e $f \vee g$ lo sono.

Vedere cosa succede se f e g sono: derivabili, derivabili con derivata continua, lipschitziane.

Rifare tutto considerando questa volta una famiglia infinita di funzioni $\{f_i : i \in I\}$ e si definendo $\bigvee_I f_i(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ e $\bigwedge_I f_i(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$.

v) Si dia un esempio di funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ derivabile tale che f' non sia integrabile.