Esercizi 1 dicembre '99

ξ) Si caratterizzino i punti di discontinuita' della seguente funzione e si dica se la stessa e' integrabile:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{0\} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1 \end{cases}$$

η) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $a \in \mathbb{R}$. dimostrare che la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

e' derivabile e che $F'(x) = f(x)$.

β) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi. $a \in \mathbb{R}$ determinare la funzione

$$F(x) = \int_a^{f(x)} tdt$$

.

ζ) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e $a \in \mathbb{R}$. Si studino le funzioni

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$F(x) = \int_{g(x)}^a f(t)dt$$

e se ne calcolino le derivate (dopo averne dimostrato l'esistenza).

ν) Si dia un esempio si una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, posto $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, sia $f(x) \neq F'(x)$.

λ) Risolvere le seguenti equazioni (laddove soluzioni esistano):

$$\int_0^x f(t)dt = x$$

$$\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

$$\int_0^x f(t)dt = xf(x).$$