5 aprile 2000

1. Siano $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ successioni di Cauchy in uno spazio metrico X. Dimostrare che la successione $\{d(p_n, q_n)\}$ converge.
   (*Suggerimento* : usare la disuguaglianza triangolare).

2. Sia X uno spazio metrico.
   (a) Diciamo due successioni $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ di Cauchy in X equivalenti se
   $$\lim_{n\to+\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$
   Provare che questa è una relazione di equivalenza.

   (b) Sia X^* l'insieme delle classi di equivalenza cosi ottenute. Se $P \in X^*$, $Q \in X^*$, $\{p_n\} \in P$, $\{q_n\} \in Q$ definiamo
   $$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to+\infty} d(p_n, q_n);$$
   per l'esercizio precedente questo limite esiste. Dimostrare che $\Delta(P, Q)$ non dipende dalla scelta del rappresentante e che quindi Δ è una distanza su X^*.

   (c) Ad ogni $p \in X$ possiamo associare una successione di Cauchy: la successione $\{p_n\}$ con $p_n = p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; sia P_p l'elemento di X^* che contiene questa successione. Dimostrare che
   $$\Delta(P_p, Q_q) = d(p, q)$$
   per ogni $p, q \in X$. Quindi la funzione $i : X \longrightarrow X^*$, $i(p) = P_p$, che ad ogni $p \in X$ associa la sua classe di equivalenza è un'isometria da X in X^* (cioè un'applicazione che conserva le distanze).

   (d) Provare che $i(X)$ è denso in X^* e che $i(X) = X^*$ se X è completo.

   (e) Provare che lo spazio X^* è uno spazio metrico completo.

Quindi possiamo identificare X e $i(X)$ e considerare X immerso nello spazio metrico completo X^*. Chiamiamo X^* il *completamento* di X.