19 gennaio 2000

1. Sia $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^2((a, +\infty))$ e siano $M_0 = sup|f(x)|$, $M_1 = sup|f'(x)|$, $M_2 = sup|f''(x)|$, su $(a, +\infty)$, provare che $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. Trovare una funzione per cui si ha l'uguaglianza.

2. Sia f una funzione reale derivabile tre volte in $[-1, 1]$, tale che

$$f(-1) = 0, \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f'(0) = 0,$$

provare che $f^{(3)}(x) > 3$ per $x \in [-1, 1]$.

3. Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$. Dimostrare che

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Mostrare con un esempio che se $f \notin C^2(\mathbb{R})$ esiste L, ma $L \neq f''(x)$.

4. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{sinx}{x} dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

5. Sia f reale derivabile con continuità su $[a, b]$, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ e

$$\int_a^b f^2(x) dx = 1.$$

Dimostrare che

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2}.$$

e che

$$\int_a^b [f'(x)]^2 dx \int_a^b x^2 f^2(x) dx > \frac{1}{4}.$$