

ESERCIZI

10 aprile 2025

1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Riemann integrabile su ogni intervallo compatto (\equiv chiuso e limitato) e tale che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Supponendo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n f(x) dx < +\infty,$$

si analizzino le seguenti affermazioni dimostrandole se si ritengono vere o smentendole con un controesempio se si ritengono false.

- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - f continua $\Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - f derivabile $\Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - f uniformemente continua $\Rightarrow \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

3. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

Si provi che f e' uniformemente continua.

4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esistono e coincidono i due seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0$.