

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome Nome
Matricola Corso di studio Anno iscrizione

1. (punti 4) Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -5 & 3k \\ 2 & -2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

- (a) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.
- (b) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.
- (c) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e z può essere scelto come parametro.
- (d) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

2. (punti 4) Sia A una matrice 3×3 con $\text{car}A = 1$ e tale che $\lambda = 1$ è un suo autovalore. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

- (a) La matrice A è sempre diagonalizzabile.
- (b) $\dim \text{Ker}A = 1$.
- (c) $\text{tr}A = 2$.
- (d) $\text{car}A^2 = 0$.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

3. (punti 7) Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono:

(b) L'equazione caratteristica di A è:

(c) Gli autovalori di A sono:

(d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t :

(e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t :

4. (punti 2) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

(a) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

- (b) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.
- (c) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.
- (d) V_3 non è un sottospazio.

L'affermazione corretta è

Dimostrazione:

5. (punti 7) Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(4z + \pi i) - 2ei \exp(2z + \frac{\pi}{2}i) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. (punti 2) Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 16$$

- (a) Sono tutte reali.
- (b) Sono tutte non reali.
- (c) Sono o reali o immaginarie pure
- (d) sono due complesse coniugate ed una doppia reale

La risposta giusta è

7. (punti 2) Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

- (a) Le rette si incontrano.
- (b) Esiste un piano che contiene le due rette.
- (c) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.
- (d) La distanza tra r ed s è 4.

La risposta esatta è

Dimostrazione:

8. (punti 6)

- (a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (1, 1, 1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

- (b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z - 18 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 3\sqrt{3}$

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome Nome
Matricola Corso di studio Anno iscrizione

1. **(punti 4)** Sia A una matrice 3×3 con $\dim \ker A = 2$ e con un autovalore non nullo. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

- (a) $\dim \operatorname{Im} A = 2$.
- (b) La matrice A non è triangolabile.
- (c) La matrice A è diagonalizzabile.
- (d) $A^2 = 0$.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

2. **(punti 4)** Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & k-2 \\ 2 & 2 & 2k-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

- (a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.
- (b) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.
- (c) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.
- (d) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e z può essere scelto come parametro.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

3. (punti 2) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

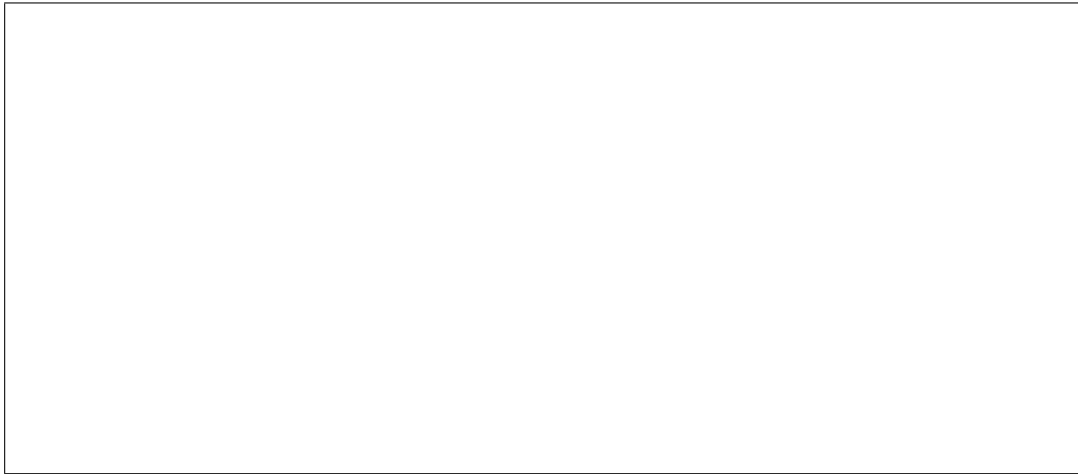
$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l \\ m & 0 \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

- (a) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.
- (b) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.
- (c) V_3 non è un sottospazio.
- (d) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.

L'affermazione corretta è

Dimostrazione:



4. (punti 7) Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & -t & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono:

(b) L'equazione caratteristica di A è:

(c) Gli autovalori di A sono:

(d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t :

(e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t :

5. (punti 7) Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(-4iz + \pi i) - 2ei \exp(-2iz + \frac{\pi}{2}i) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. (punti 2) Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 81$$

(a) Sono tutte non reali.

(b) Sono tutte reali.

(c) sono due complesse coniugate ed una doppia reale

(d) Sono o reali o immaginarie pure

La risposta giusta è

7. (punti 2) Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}$$

- (a) Esiste un piano che contiene le due rette.
- (b) Le rette si incontrano.
- (c) La distanza tra r ed s è 3.
- (d) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.

La risposta esatta è

Dimostrazione:

8. (punti 6)

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (-1, -1, -1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

(b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z + 18 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 3\sqrt{3}$

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome Nome
Matricola Corso di studio Anno iscrizione

1. (punti 7) Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t & 1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono:

(b) L'equazione caratteristica di A è:

(c) Gli autovalori di A sono:

(d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t :

(e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t :

2. (punti 2) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

- (a) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.
- (b) V_3 non è un sottospazio.
- (c) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.
- (d) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.

L'affermazione corretta è

Dimostrazione:

3. (punti 4) Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & k-1 \\ 1 & 4 & 1+2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

- (a) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e z può essere scelto come parametro.
- (b) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.
- (c) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.
- (d) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

4. (**punti 4**) Sia A una matrice 3×3 con $\text{car}A = 1$ e tale che $\lambda = 1$ è un suo autovalore. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

- (a) $\text{tr}A = 2$.
- (b) $\text{car}A^2 = 0$.
- (c) La matrice A è sempre diagonalizzabile.
- (d) $\dim \text{Ker}A = 1$.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

5. (**punti 7**) Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(-4z - \pi i) + 2ei \exp(-2z - \frac{\pi}{2}i) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. (**punti 2**) Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 16i$$

- (a) Sono o reali o immaginarie pure
- (b) sono due complesse coniugate ed una doppia reale
- (c) Sono tutte reali.
- (d) Sono tutte non reali.

La risposta giusta è

7. (punti 2) Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 5 \\ y = -t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -1 \\ y = -2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

- (a) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.
- (b) La distanza tra r ed s è 6.
- (c) Le rette si incontrano.
- (d) Esiste un piano che contiene le due rette.

La risposta esatta è

Dimostrazione:

8. (punti 6)

- (a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (1, 1, 1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

- (b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z + 15 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 4\sqrt{3}$

Compitino di Geometria per Meccanici e Biomedici
6 maggio 2000

Cognome Nome
Matricola Corso di studio Anno iscrizione

1. (punti 2) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\} \\ V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : c, d \in \mathbf{R} \right\} \\ V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & l \\ m & 0 \end{pmatrix} : l, m \in \mathbf{R} \right\}. \end{aligned}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

- (a) V_3 non è un sottospazio.
- (b) $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 + V_2$.
- (c) $\dim V_1 = \dim V_2 + \dim V_3$.
- (d) $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbf{R})$.

L'affermazione corretta è

Dimostrazione:

2. (punti 7) Sia data l'applicazione lineare $L_A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ con matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1 \\ 0 & t & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) I valori di t per i quali l'applicazione lineare L_A è un isomorfismo sono:

(b) L'equazione caratteristica di A è:

(c) Gli autovalori di A sono:

(d) La matrice è triangolabile per i seguenti valori di t :

(e) La matrice è diagonalizzabile per i seguenti valori di t :

3. **(punti 4)** Sia A una matrice 3×3 con $\dim \ker A = 2$ e con un autovalore non nullo. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e dimostrarla.

(a) La matrice A è diagonalizzabile.

(b) $A^2 = 0$.

(c) $\dim \operatorname{Im} A = 2$.

(d) La matrice A non è triangolabile.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

4. **(punti 4)** Sia dato il sistema S

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & k+3 & 0 \\ 1 & k+3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera, e giustificarla.

(a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ le soluzioni del sistema sono proporzionali.

- (b) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S ha ∞ soluzioni e y può essere scelto come parametro.
- (c) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ il sistema S è risolubile con infinite soluzioni.
- (d) Esiste $k \in \mathbf{R}$ per il quale il sistema S non ha soluzioni.

L'affermazione esatta è

Dimostrazione:

5. **(punti 7)** Determinare i numeri complessi z tali che

$$\begin{cases} \exp(4iz - \pi) + 2ei \exp(2iz - \frac{\pi}{2}) - e^2 = 0 \\ |z| < 1. \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

6. **(punti 2)** Le radici dell'equazione complessa

$$z^4 = 81i$$

- (a) sono due complesse coniugate ed una doppia reale
- (b) Sono o reali o immaginarie pure
- (c) Sono tutte non reali.
- (d) Sono tutte reali.

La risposta giusta è

7. **(punti 2)** Siano date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -4 \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

- (a) La distanza tra r ed s è 5.
- (b) Esiste una ed una sola retta incidente entrambe.
- (c) Esiste un piano che contiene le due rette.
- (d) Le rette si incontrano.

La risposta esatta è

Dimostrazione:

8. (punti 6)

- (a) Scrivere l'equazione del piano tangente in $P \equiv (-1, -1, -1)$ alla sfera S di centro $O \equiv (0, 0, 0)$ passante per P

- (b) Scrivere l'equazione della sfera tangente in P alla sfera S ed intersecante il piano di equazione

$$x - y + z - 15 = 0$$

in una circonferenza di raggio $r = 4\sqrt{3}$