Soluzioni degli esercizi proposti il 30 ottobre 1998

(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. Sia $f : A \to B$, provare:

   (a) Siano $C \subset D \subset A$.

   - $f(C) \subset f(D)$: se $b = f(c)$ con $c \in C$, poiché $C \subset D$ si ha $c \in D$, e quindi vi è $d \in D$ per cui $b = f(d)$, appunto $d = c$.
   - $C \subset f^{-1}(f(C))$: si ha $f^{-1}(f(C)) = \{x \in A : \exists y \in f(C) \text{ e } f(x) = y\}$. Se $x = c \in C$ poiché $y = f(c) \in f(C)$ si ha ovviamente $f(x) = f(c) = y$.
     In genere l'inclusione non è un eguaglianza: $C = \{0\} \subset A = \{0; 1\}$, $B = \{0\}$, $f(x) = 0$, nel caso $A = f^{-1}(f(C))$.
     L'eguaglianza si ha se f è iniettiva su A. In effetti se $x \in f^{-1}(f(C))$ ($x \in A$) si ha $f(x) = f(c)$ per qualche $c \in C$, se f è iniettiva su A si ha quindi $x = c \in C$.
     Se poi $C = f^{-1}(f(C))$, per ogni $C \subset A$ ne segue che f è iniettiva su A: basta considerare i sottoinsiemi $C = \{a\}$ al variare di $a \in A$.
   - $f(D) \setminus f(C) \subset f(D \setminus C)$: se $b = f(d)$ per qualche $d \in D$ ma $b \neq f(c)$ per ogni $c \in C$, ne segue tale $d \in D \setminus C$.
     Per quanto riguarda l'eguaglianza il precedente controesempio con $A = D$ mostra che non è in generale vera. Se invece f è iniettiva e $b = f(d)$ con $d \in D \setminus C$, non vi può essere alcun $c \in C$ per cui $b = f(c)$, altrimenti per iniettività $c = d$.

   (b) Sia $\{C_i\}$ una famiglia di sottoinsiemi di A.

   - $f(\bigcup_i C_i) = \bigcup_i f(C_i)$:
     $\subset$: sia $b = f(x)$ per qualche $x \in \bigcup_i C_i$, per definizione di unione per qualche i si ha $x \in C_i$, quindi per qualche i si ha $b = f(x)$ per qualche $x \in C_i$, cioè $b \in \bigcup_i f(C_i)$.
     $\supseteq$: viceversa poichè per ogni i si ha $C_i \subset \bigcup_i C_i$, ne segue, per il primo punto di (a), che per ogni i si ha $f(C_i) \subset f(\bigcup_i C_i)$. Quindi $\bigcup_i f(C_i) \subset f(\bigcup_i C_i)$.
   - $f(\bigcap_i C_i) \subset \bigcap_i f(C_i)$: poichè per ogni i si ha $\bigcap_i C_i \subset C_i$, per il primo punto di (a) ne segue che per ogni i $f(\bigcap_i C_i) \subset f(C_i)$ e quindi la tesi.
     Se f non è iniettiva non vale in generale l'eguaglianza come mostra il seguente esempio: $C_1 = \{0; 2\}$, $C_2 = \{0; 1\}$, $A = B = \{0; 1; 2\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$.
     Se poi f è iniettiva e $b \in \bigcap_i f(C_i)$ si ha $b = f(x) = f(y) \to x = y$ e $\forall i[\exists x(x \in C_i \text{ e } b = f(x))]$, quindi per ogni i, detto x_i l'elmento di C_i per cui $b = f(x_i)$, deve essere $b = f(x_i) = f(x_j)$ per ogni i e per ogni j, e quindi $x_i = x_j$ per ogni i e per ogni j, in particolare fissato j si deve avere $x_j \in C_i$ per ogni i, cioè $x_j \in \bigcap_i C_i$.

   (c) Siano $E \subset F \subset B$.

   - $f^{-1}(E) \subset f^{-1}(F)$: $a \in f^{-1}(E)$ vuol dire che vi è $e \in E$ per cui $f(a) = e$, cioè $f(a) \in E$. Ma $E \subset F$ quindi si ha $f(a) \in F$. Se poi $f^{-1}(E) = \emptyset$ l'inclusione è immediata.
   - $f(f^{-1}(E)) \subset E$, e vale l'uguale se f è surgettiva da A su B: che $a \in f^{-1}(E)$ è equivalente a $f(a) \in E$. Se poi $f^{-1}(E) = \emptyset$ basta osservare che $f(\emptyset) = \emptyset$. Nel caso in cui f sia surgettiva per ogni $e \in E \subset B$ vi è $a \in A$ per cui $f(a) = e$.

- $f^{-1}(F \setminus E) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(E)$: a è tale che $f(a) \in F \setminus E$ se e solo se: $f(a) \in F$ (cioé $a \in f^{-1}(F)$) e $f(a) \notin E$ (cioé $a \notin f^{-1}(F)$).

(d) Sia $\{E_i\}$ è una famiglia di sottoinsiemi di B.

- $f^{-1}(\bigcup_i E_i) = \bigcup_i f^{-1}(E_i)$: per il primo punto di (c) l' inclusione $\supseteq$ è immediata. Va provata l'inclusione $\subset$: se a è tale che $f(a) \in \bigcup_i E_i$ per definizione di unione per qualche i si ha $f(a) \in E_i$, e quindi la tesi.
- $f^{-1}(\bigcap_i E_i) = \bigcap_i f^{-1}(E_i)$: $a \in \bigcap_i f^{-1}(E_i)$ è equivalente a: per ogni i $f(a) \in E_i$, che è equivalente a: $f(a) \in \bigcap_i E_i$, che é equivalente a: $a \in f^{-1}(\bigcap_i E_i)$.

2. *Siano f e g funzioni per cui* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$.

(a) Se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva: se $f(x) = f(y)$ essendo g una funzione la trasformazione $z \mapsto g(z)$ è univoca, quindi $g(f(x)) = g(f(y))$, ovvero $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Per ipotesi sulla composta segue $x = y$.

(b) Se $g \circ f$ è surgettiva (su un certo B), allora g è surgettiva (su tale B): se infatti un qualsiasi $b \in B$ è del tipo $b = g \circ f(x) = g(f(x))$, per qualche x, è in particolare del tipo $b = g(y)$ per qualche y.

(c) Se $g \circ f$ è iniettiva e f è surgettiva (su $\operatorname{Dom} g$), allora g è iniettiva: se $g(z) = g(y)$ per la surgettività di f su $\operatorname{Dom} g$, deve essere $z = f(u)$ per qualche u, e $y = f(v)$ per qualche v. Sostituendo $g(f(u)) = g(f(v))$, e per iniettività di $g \circ f$ si ottiene $u = v$, ed essendo f una trasformazione univoca si ha anche $f(u) = f(v)$, cioè $z = y$.

(d) Se $g \circ f$ è surgettiva su $\operatorname{Im} g$ e g è iniettiva, allora f è surgettiva su $\operatorname{Dom} g$: dato $y \in \operatorname{Dom} g$ vi è x per cui $g(y) = g(f(x))$, per iniettività di g $y = f(x)$. Se g non fosse iniettiva la conclusione non sarebbe più vera, per esempio: $g(y) = y^2 \;,\;\; y \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \;,\;\; x \in \mathbb{R}$.

3. Descrivere il campo di esistenza massimale (come sottoinsieme di $\mathbb{R}$) delle seguenti leggi. Quindi determinare grafico e immagine delle funzioni individuate e dire in quali intervalli esse sono invertibili e calcolarne l'inversa.

- $4x^2$: l'espressione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, il suo grafico è una parabola di fuoco $F = (0; 1/16)$ e direttrice $d = \{y = -1/16\}$, la sua immagine è $y \geq 0$ ($y = \sqrt{y^2}$ se $y \geq 0$), è invertibile se ristretta a $x \leq 0$ con inversa $g(x) = -\sqrt{x/4} \;,\;\; x \geq 0$, è invertibile se ristretta a $x \geq 0$ con inversa $h(x) = \sqrt{x/4} \;,\;\; x \geq 0$. In particolare è iniettiva su tutti gli intervalli $[a, b]$ (con estremi eventualmente infiniti) contenuti in una di queste semirette, nei casi le leggi delle inverse saranno rispettivamente le stesse, e i loro domini saranno $[\min\{4a^2, 4b^2\}, \max\{4a^2, 4b^2\}]$.
- $\sqrt{2x}$: l'espressione è definita per ogni $x \geq 0$, essa è l'inversa della funzione $g(x) = x^2/2 \;,\;\; x \geq 0$, quindi il suo grafico è il simmetrico rispetto alla retta $\{x = y\}$ dell'insieme dato dall'intersezione del grafico della parabola di fuoco $(0; 1/2)$ e direttrice $y = -1/2$ con il semipiano $x \geq 0$. In particolare è iniettiva e ha immagine $y \geq 0$. Analogamente a prima si scrivono le inverse delle sue restrizioni ad intervalli contenuti nel campo di esistenza.
- $|x|$: l'espressione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, il suo grafico è dato dall'unione delle due semirette $\{x = y \text{ e } x \geq 0\}$ e $\{-x = y \text{ e } x \leq 0\}$, la sua immagine è $y \geq 0$ ($y = |y|$ se $y \geq 0$). Infine è invertibile su $x \geq 0$ con inversa $h(x) = x \;,\;\; x \geq 0$, e su $x \leq 0$ con inversa $g(x) = -x \;,\;\; x \geq 0$.

In particolare su tali semirette è iniettiva. Analogamente a prima si scrivono le inverse delle restrizioni ad intervalli contenuti in una delle due semirette con domini $[\min\{|a|,|b|\},\max\{|a|,|b|\}]$.

- $x[x]$: l'espressione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sugli intervalli del tipo $[m, m+1[$, con $m \in \mathbb{Z}$, il grafico è il segmento $\{(x;y) : x \in [m, m+1[$ e $y = mx\}$, cioè $(1-t)(m;m^2) + t(m+1; m(m+1))$, $t \in [0,1[$. Quindi l'immagine della funzione sull'intervallo $[m, m+1[$ è $[m^2, m(m+1)[$ se $m \geq 0$, ed è $]-m(-m-1), (-m)^2]$ se $-m > 0$. In particolare l'immagine di tale funzione è $y \geq 0$: infatti $\{[n^2, n(n+1)[: n \in \mathbb{N}\} \cup \{]n(n-1), n^2]; n > 0\} = \{[n^2, n(n+1)[: n \in \mathbb{N}\} \cup \{](n+1)n, (n+1)^2]; n \in \mathbb{N}\}$ ricopre tutto $[0,+\infty[$. Gli unici intervalli per cui la restrizione della funzione è iniettiva sono quelli contenuti o nella semiretta $]-\infty, 0]$ o nella semiretta $[1,+\infty[$. Sulla semiretta $]-\infty, 0]$ l'inversa è data da $g(x) = -x/(n+1)$, $x \in](n+1)n, (n+1)^2]$ con dominio $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}](n+1)n, (n+1)^2]$, sulla semiretta $[1,+\infty[$ l'inversa è data da $h(x) = x/n$, $x \in [n^2, n(n+1)[$ con dominio $\bigcup_{n\geq 1}[n^2, n(n+1)[$.
- $\mathrm{sgn}(x)$: l'espressione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, la sua immagine è $\{-1;0;1\}$, il suo grafico è $\{y = -1$ e $x < 0\} \cup \{(0;0)\} \cup \{y = 1$ e $x > 0\}$, è iniettiva se ristretta agli insiemi del tipo $\{-a^2; 0; b^2\}$, in particolare gli unici intervalli ove è iniettiva sono punti.
- $\sqrt{4-x^2}$: l'espressione è definita per tutti gli x per cui $4-x^2 \geq 0$, cioè $4 \geq x^2$ cioè $2 \geq |x|$ cioè $-2 \leq x \leq 2$. L'immagine è l'intervallo $[0,2]$: infatti se $0 \leq y \leq 2$ e si impone $y = \sqrt{4-x^2}$, $|x| \leq 2$, elevando al quadrato si ha $y^2 = |4-x^2|$, $|x| \leq 2$, che per la condizione su x è equivalente a $y^2 = 4-x^2$, $|x| \leq 2$, quindi $x^2 = 4-y^2$, $|x| \leq 2$, che è risolubile poichè $0 \leq y \leq 2$, e quindi $x = \sqrt{4-y^2}$ o $x = -\sqrt{4-y^2}$. In particolare la funzione è iniettiva ed invertibile su $[0,2]$, con inversa $h(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0,2]$, e su $[-2,0]$ con inversa $g(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $x \in [0,2]$. Il grafico è quindi la semiciconferenza di centro $(0;0)$, raggio 2, diametro $\{-2 \leq x \leq 2\}$, altezza $\{0 \leq y \leq 2\}$, in coordinate $\{(x;y) : x^2+y^2 = 4$ e $x \in [-2,2]$ e $y \in [0,2]\}$.
- $x^2 - 4x$: l'espressione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poichè $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ il grafico è quello di una parabola di fuoco $F = (2; -4 + 1/4) = (2; -15/4)$, direttrice $d = \{y = -4 - 1/4 = -17/4\}$, asse $x = 2$. L'equazione $y = x^2 - 4x$ ha le stesse soluzioni di $y + 4 = (x-2)^2$, quindi dovrà essere che l'immagine della funzione è contenuta nella semiretta $[-4,+\infty[$. D'altronde per $y \geq -4$ l'equazione $y + 4 = (x-2)^2$ ha esattamente le soluzioni $x = 2 + \sqrt{y+4}$ o $x = 2 - \sqrt{y+4}$. Quindi l'immagine è tutta la semiretta $[-4,+\infty[$. Inoltre la funzione è iniettiva ed invertibile su $[2,4]$ con inversa $2 + \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$, ed è iniettiva ed invertibile su $[0,2]$ con inversa $2 - \sqrt{x+4}$, $x \geq -4$.

4. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni.

- $\log_{3/2} x = -1$: deve essere $(3/2)^{-1} = x$, cioè $x = 2/3$.
- $\log_3 x = 2$: $3^2 = x$, cioè $x = 9$.
- $\sqrt{8^x} = 1/4$: $8^x = 1/16$, cioè $2^{3x} = 2^{-4}$, cioè $x = -4/3$.
- $\frac{2^x-1}{2^x+1} > 2^x$: poiché $2^x + 1 > 0$ le soluzioni sono esattamente quelle di $2^x - 1 > 2^x(2^x+1)$, cioè $-1 > 4^x$. Poiché questa diseguaglianza non ha soluzioni ($4^x > 0$), la diseguaglianza di partenza non ha soluzioni.
- $\log(x-2)+\log(x-3) = 2\log x$: per le proprietà del logaritmo l'equazione è equivalente a $\log(\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}) = 0$ e $x - 2 > 0$ e $x - 3 > 0$ e $x > 0$, cioè

$\frac{(x-2)(x-3)}{x^2} = 1$ e $x-2>0$ e $x-3>0$ e $x>0$, cioè $(x-2)(x-3) = x^2$ e $x-2>0$ e $x-3>0$ e $x>0$, cioè $x^2-5x+6 = x^2$ e $x-2>0$ e $x-3>0$ e $x>0$, cioè $x = 6/5$ e $x-2>0$ e $x-3>0$ e $x>0$. Quindi non vi sono soluzioni.

- $81^{2x-1} + 2 \cdot 9^{4x} + 711 = 81^{2x+1} + \frac{1}{4}$: considerando che $81 = 9^2$, per le proprietà della funzione esponenziale l'equazione è equivalente a: $\frac{9^{4x}}{81} + 2 \cdot 9^{4x} + 711 = 81 \cdot 9^{4x} + \frac{1}{4}$, cioè $9^{4x}(\frac{1}{81} + 2 - 81) = \frac{1}{4} - 711$ cioè $-\frac{6398}{81} 9^{4x} = -\frac{2843}{4}$, cioè $3^{8x} = \frac{81 \cdot 2843}{4 \cdot 6398}$, cioè $x = \frac{\log_3 \frac{81 \cdot 2843}{4 \cdot 6398}}{8}$.
- $\log_{1/2}(\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x) \geq \log_{1/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad$ con $x \in [0, 2\pi]$: poiché $\log_{1/2} z$ è decrescente in z, la diseguaglianza è equivalente a $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad$ con $x \in [0, 2\pi]$. Posto $t = \sin x \quad$ con $x \in [0, 2\pi]$ si risolve $t^2 - \frac{3}{2}t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad$ con $t \in [-1, 1]$, cioè $t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 0 \quad$ con $t \in [-1, 1]$, cioè $-\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq t \leq -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}}$ e $-1 \leq t \leq 1$. Poichè $-\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq -\frac{3}{2} < -1$ e $-1 \leq 0 \leq -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}} < 1$, le soluzioni sono date da $t \in [-1, -\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}}]$. Concludendo le soluzioni sono (si tenga persente che $\mathrm{Im}\,(\mathrm{arsin}) = [-\pi/2, \pi/2]$): $[0, \mathrm{arsin}(-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}})] \cup [\pi - \mathrm{arsin}(-\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}}), 2\pi]$.