

Esercizi  
27 novembre 1998  
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , convessa. Mostrare che se  $f$  non è costante e  $f(0) < 0$  allora il numero di zeri di  $f$  è 0, 1 o 2.

**-Vi sono al più due zeri:** se per assurdo  $f(x) = f(y) = f(z) = 0$ ,  $x < y < z$ , in particolare, poichè i tre zeri sono diversi da 0 essendo  $f(0) < 0$ , ve ne sarebbero almeno due con lo stesso segno. Ma se si avesse  $f(0) < 0 = f(a) = f(b)$ ,  $0 < a < b$ , si otterrebbe una contraddizione dall'ipotesi di convessità:

$$0 = f(a) \leq f(0) + \frac{f(b) - f(0)}{b}a = f(0)\left(1 - \frac{a}{b}\right) < 0.$$

Analogamente si ottiene una contraddizione se  $f(0) < 0 = f(a) = f(b)$ ,  $a < b < 0$ .

**-Vi è almeno uno zero:**

- se vi è almeno un  $a$  per cui  $f'_+(a) \neq 0$  oppure  $f'_-(a) \neq 0$  si ottiene quanto desiderato. Infatti:

se  $f'_-(a) < 0$  si ha:  $f(x) \geq f'_-(a)(x - a) + f(a) \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$ . In Particolare vi è  $x < 0$  con  $f(x) > 0$ . Essendo  $f$  convessa su  $\mathbf{R}$  è continua in  $[x, 0]$ . Poichè  $f(0)f(x) < 0$  per il teorema del valor medio vi è  $\xi \in ]x, 0[$  per cui  $f(\xi) = 0$ ;

se  $f'_+(a) > 0$  si ha  $f(x) \geq f'_+(a)(x - a) + f(a) \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Argomentando come al punto precedente si trova  $\xi > 0$  per cui  $f(\xi) = 0$ ;

poichè  $f'_+(a) \geq f'_-(a)$ , non rimarrebbero altri casi da analizzare;

- se per assurdo  $\forall a : f'_+(a) = f'_-(a) = 0$  si avrebbe che  $\forall a \exists f'(a) = 0$ , cioè  $f$  sarebbe derivabile su tutto  $\mathbf{R}$  con derivata nulla. Ma allora sarebbe costante, contraddicendo l'ipotesi.

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Poichè la funzione da integrare è definita per  $x > 0$ , si considera il seguente cambio di variabile  $t = \sqrt[6]{x}$ , per cui  $t^6 = x$ . Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx &= [t = \sqrt[6]{x}] \quad 6 \int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{t^3}{t + 1} dt = \\ &6 \int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - 6 \int \frac{1}{t + 1} dt = 6 \int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - 6 \log(t + 1) = \\ &6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \log(t + 1) = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \log(t + 1) = \\ &[t = \sqrt[6]{x}] \quad 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \log(\sqrt[6]{x} + 1)^6. \end{aligned}$$

3. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1 + t^2} dt, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

- (a) *calcolare se esiste la derivata di  $f$* : la funzione  $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$  è continua su  $\mathbf{R}$ . Quindi la funzione integrale  $F(y) = \int_0^y g(t)dt$  è derivabile su tutto  $\mathbf{R}$ . D'altronde  $f(x) = F(\tan x)$ . Quindi  $f$  è derivabile per  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , ( $k \in \mathbf{Z}$ ), e si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(\tan x) \cdot (\tan x)' = g(\tan x) \cdot (1 + \tan^2 x) = \\ &= \sin(\tan x), \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{aligned}$$

- (b) *si provi che  $f$  è estendibile con continuità a tutto  $\mathbf{R}$* : nel suo dominio di definizione  $f$  è continua essendo derivabile. Affinché  $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sia continua ed estenda  $f$  basta che:

$$\varphi(x) = f(x), \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \& \quad \exists \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \varphi(y) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right);$$

poichè se  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  si ha  $\exists \lim_{y \rightarrow x} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x) = \varphi(x)$ .

Quindi basta provare che:  $\exists \lim_{y \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)} f(y) =_{def} L_k$ ,

$$\text{e quindi definire: } \varphi(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ L_k & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Per provare l'esistenza del limite di  $f$  nei punti in cui non è definita basta provare che esistono il limite destro ed il limite sinistro e sono uguali. Osservando inoltre che  $f$  è  $\pi$ -**periodica** basta dimostrare:

$$\exists \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(y) = l_1 \quad \& \quad \exists \lim_{y \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(y) = l_2 \quad \& \quad l_1 = l_2 \in \mathbf{R}.$$

Poichè la funzione  $g(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$  è Riemann integrabile sugli intervalli limitati (è continua), ed è in modulo minore di  $\frac{1}{1+t^2}$  non negativa e sommabile in senso generalizzato su tutto  $\mathbf{R}$ , si ha che anche  $g(t)$  è sommabile in senso generalizzato su tutto  $\mathbf{R}$ . In particolare è integrabile in senso improprio su  $[0, +\infty)$ , cioè:

$$\exists \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{1+t^2} dt = l_1 \in \mathbf{R}.$$

Quindi poichè  $\tan x \rightarrow +\infty$ , se  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , si ha:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{1+t^2} dt \in \mathbf{R}.$$

Analogamente si ha che esiste  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = l_2 \in \mathbf{R}$ , essendo  $g(t)$  integrabile in senso improprio su  $(-\infty, 0]$ , e  $\tan x \rightarrow -\infty$ , se  $x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+$ . Per provare che tali limiti sono uguali basta osservare che la funzione  $g(t)$  è **dispari**, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int_0^{-y} \frac{\sin t}{1+t^2} dt &= - \int_{-y}^0 \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \int_{-y}^0 \frac{\sin(-t)}{1+(-t)^2} dt = - \int_y^0 \frac{\sin \tau}{1+\tau^2} d\tau \\ &= \int_0^y \frac{\sin \tau}{1+\tau^2} d\tau \end{aligned}$$

(c) *chissà se l'estensione è derivabile su tutto  $\mathbf{R}$ ?* : si considera l'estensione di  $f$  a tutto  $\mathbf{R}$ , che per quanto provato è:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \int_0^{\tan x} \frac{\sin t}{1+t^2} dt & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Si osserva che la funzione  $\varphi$  è derivabile nei punti  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  poichè è estensione di una funzione che è derivabile in tutto un intervallo aperto che contiene uno di tali  $x$ .

Poichè la funzione  $\varphi$  è  $\pi$ -**periodica**, per verificare se  $\varphi$  è derivabile nei punti  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  potrebbe bastare provare che:

$$\exists \varphi'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) \ \& \ \exists \varphi'_+\left(-\frac{\pi}{2}\right) \ \& \ \varphi'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi'_+\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Si esamina l'esistenza di  $\varphi'_-\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Dato  $x < \frac{\pi}{2}$ , si considera il rapporto incrementale di  $\varphi$  in  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\Delta(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt.$$

Inizialmente si osserva che:  $|\Delta(x)| \leq 1$ , in quanto **il modulo dell'integrale è minore o eguale all'integrale del modulo**, e  $|\sin t| \leq 1$ , e  $\int_{\tan x}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 1$ .

Questa stima sembra non ottimale poichè non tiene conto delle oscillazioni del  $\sin t$  tra valori negativi e valori positivi che potrebbero abbassare di molto il valore del modulo dell'integrale rispetto al valore dell'integrale del modulo. In effetti questa diminuzione è drastica, e viene messa in evidenza integrando **per parti**:  $\Delta(x) =$

$$\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \left\{ \left[ \frac{-\cos t}{1+t^2} \right]_{\tan x}^{+\infty} - \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{2t \cos t}{(1+t^2)^2} dt \right\},$$

quindi:  $\Delta(x) = \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{-\cos(\tan x)}{1+(\tan x)^2} - \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{2t \cos t}{(1+t^2)^2} dt \right\}$ , per cui si ha la stima (si consideri  $x > 0$  per avere  $\tan x > 0$ ):

$$\begin{aligned} |\Delta(x)| &\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \left\{ \frac{|\cos(\tan x)|}{1+(\tan x)^2} + \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{|2t \cos t|}{(1+t^2)^2} dt \right\} \\ &\leq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \left\{ \frac{1}{1+(\tan x)^2} + \int_{\tan x}^{+\infty} \frac{|2t|}{(1+t^2)^2} dt \right\} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \left\{ \frac{1}{1+(\tan x)^2} + \int_{1+(\tan x)^2}^{+\infty} \frac{1}{\tau^2} d\tau \right\} \\ &= 2 \frac{(\cos x)^2}{\frac{\pi}{2} - x} = 2 \frac{(\sin(\frac{\pi}{2} - x))^2}{\frac{\pi}{2} - x} \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-. \end{aligned}$$

Quindi  $\exists \varphi'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . In modo del tutto analogo si ha  $\exists \varphi'_+\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ . Quindi  $\varphi$  è derivabile anche in tutti i punti del tipo  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ , e la sua derivata è nulla.