Soluzioni degli esercizi proposti il 23 ottobre 1998

(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Trovare* $\sup A$ *e* $\inf A$ *per i seguenti insiemi.*

   (a) $A = \left\{\frac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in]0,1[\right\}$. Poiché $(x-y)^2 \geq 0$ si ha $2xy \leq x^2+y^2$ e quindi $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$. Se $x = y$ allora $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ e quindi l'estremo superiore è valore massimo, è uguale a $1/2$ ed è assunto per tutti gli x, y per cui $x = y$. Fissato y si ha $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq x\frac{1}{y}$ e scelto $0 < \bar{x} < \varepsilon y$ si ha $0 < \frac{\bar{x}y}{x^2+y^2} < \varepsilon$. Quindi l'estremo inferiore è il valore 0 e non è mai assunto.

   (b) $A = \left\{\frac{nm}{n^2+m^2} : n, m \in \mathbf{N}, n^2+m^2 \neq 0\right\}$. Come nel caso precedente l'estremo superiore è valore massimo ed è uguale ad $1/2$. Poiché $\frac{nm}{n^2+m^2} \geq 0$ e per $n = 0$, $m = 1$ si ha $\frac{nm}{n^2+m^2} = 0$, l'estremo inferiore è valore minimo eguale a 0, ed è assunto se $n = 0$ oppure se $m = 0$.

   (c) $A = \left\{\frac{m-2}{3n} : n, m \in \mathbf{N}, n \geq 1\right\}$. Per $n = 1$ si ha $\frac{m-2}{3n} = \frac{m-2}{3}$ e per $m = 3N+2$ si trova $\frac{m-2}{3n} = N$. Dunque l'estremo superiore è $+\infty$. Per ogni $n \geq 1$ e per ogni $m \geq 0$ si ha $\frac{m-2}{3n} \geq \frac{-2}{3n} \geq -\frac{2}{3}$ e si ha l'eguaglianza se $n = 1$ e $m = 0$. Dunque l'estremo inferiore è valore minimo eguale a $-\frac{2}{3}$, assunto per $m = 0$ e $n = 1$.

   (d) $A = \left\{\frac{xy}{x+y} : x, y \in]0,1[\right\}$. Cambiando variabile e ponendo $S = x + y$ il problema è equivalente a trovare l'estremo superiore di $\frac{x(S-x)}{S}$ al variare di $x \in]0,1[$, $S \in]0, 1+x[$: $\frac{x(S-x)}{S} = x - \frac{x^2}{S} = \frac{S}{4} - \left(\frac{x}{\sqrt{S}} - \frac{\sqrt{S}}{2}\right)^2$, fissato S assume valore massimo per $x = S/2$ e il massimo è $S/4$. Per $S \in]0,2[$ $S/4 < 1/2$, d'altronde per $S = 2-\varepsilon$ (con ad esempio $x = 1-\varepsilon/2$) si trova $S/4 = \frac{2-\varepsilon}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$, quindi l'estremo superiore è $1/2$. Un metodo alternativo è considerare $\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < 1/2$, e procedere quindi ponendo $x = y = 1-\varepsilon$.

   L'estremo inferiore di $\frac{xy}{x+y}$ è 0, infatti $0 < \frac{xy}{x+y} \leq \frac{xy}{y} = x \in]0,1[$.

   (e) $A = \left\{\frac{mn}{m+n} : m, n \in \mathbf{N}, m+n \geq 1\right\}$. Per $m = n$ si ha $\frac{mn}{m+n} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2}$. Per $m = 2N$ si ottiene $\frac{mn}{m+n} = N$, quindi l'estremo superiore è $+\infty$. L'estremo inferiore è minimo ed è il valore 0, assunto per $m = 0$ oppure per $n = 0$.

   (f) $A = \left\{|x| : x^2+x < 2\right\}$. $\{x \in \mathbf{R} : x^2+x < 2\} = \{x \in \mathbf{R} : x^2+x-2 < 0\} = \{x \in \mathbf{R} : (x+2)(x-1) < 0\} =]-2;1[$. Essendo $|x| \geq 0$ l'estremo inferiore è il valore minimo 0 assunto per $x = 0 \in]-2;1[$. L'estremo superiore è il valore -2, infatti per $x = -2+\varepsilon \in]-2;1[$ si ha $|x| = |-2+\varepsilon| = 2-\varepsilon$ e per ogni $x \in]-2;1[$ si ha $|x| < 2$.

2. *Dati* $a_1 \neq a_2$, *trovare il più grande* y *tale che* $|x-a_1| + |x-a_2| \geq y$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}$.

   Si tratta di trovare l'estremo inferiore di $\{|x-a_1|+|x-a_2| : x \in \mathbf{R}\}$ dati $a_1 < a_2$. Per la disuguaglianza triangolare $|a_1-a_2| = |(a_1-x)-(a_2-x)| \leq |x-a_1| + |x-a_2|$. D'altronde se $x \in [a_1;a_2]$ allora $|x-a_1|+|x-a_2| = a_2-a_1 = |a_1-a_2|$. Quindi tale estremo inferiore è valore minimo pari a a_2-a_1, ed è assunto per $x \in [a_1;a_2]$.

3. *Generalizzare l'esercizio precedente a* n *punti* $a_1, \ldots, a_n$.

Si tratta di trovare l'estremo inferiore di $\{|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|: x \in \mathbf{R}\}$, dati $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Conviene dividere la discussione in due casi:

- $n = 2N$ (n pari). Qualunque sia $x \in \mathbf{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} &(a_{2N} - a_1) + (a_{2N-1} - a_2) + \cdots + (a_{N+1} - a_N) \\ &= \ (a_{2N} - x) + (x - a_1) + \cdots + (a_{N+1} - x) + (x - a_N) \\ &\leq \ |x - a_{2N}| + |x - a_1| + \cdots + |x - a_{N+1}| + |x - a_N|. \end{aligned}$$

  D'altronde se $x \in [a_N; a_{N+1}]$ la precedente risulta essre una uguaglianza e quindi l'estremo inferiore è il valore minimo

$$a_{2N} - a1 + a_{2N-1} - a_2 + \cdots + a_{N+1} - a_N.$$

- $n = 2N + 1$ (n dispari). È del tutto analogo al precedente:

$$\begin{aligned} &(a_{2N} - a_1) + (a_{2N-1} - a_2) + \cdots + (a_{N+2} - a_N) \\ &= \ (a_{2N} - x) + (x - a_1) + \cdots + (a_{N+2} - x) + (x - a_N) \\ &\leq \ |x - a_{2N}| + |x - a_1| + \cdots + |x - a_{N+2}| + |x - a_N| \\ &\leq \ |x - a_{2N}| + |x - a_1| + \cdots + |x - a_{N+2}| + |x - a_N| + |x - a_{N+1}|. \end{aligned}$$

  Stavolta si ha l'uguaglianza solo quando $x = a_{N+1}$. Dunque l'estremo inferiore è

$$a_{2N} - a1 + a_{2N-1} - a_2 + \cdots + a_{N+1} - a_N.$$

  che è valore minimo assunto per l'appunto per $x = a_{N+1}$.

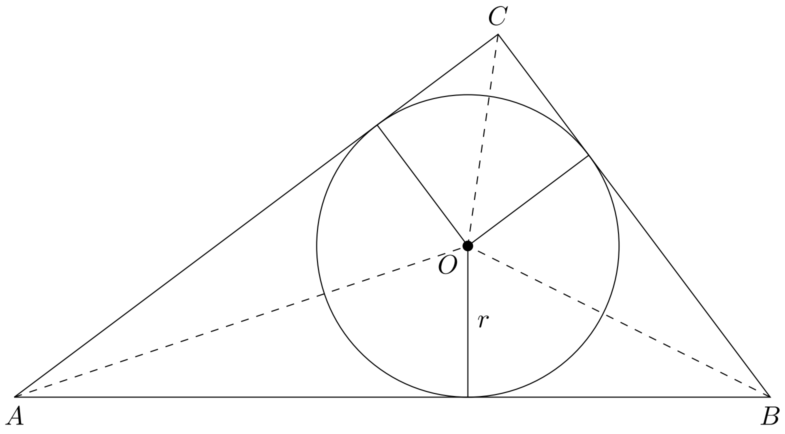
4. *Siano* $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ *tre vettori di lunghezza* 1 *applicati nello stesso punto e in equilibrio, cioè* $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = 0$. *Mostrare che i tre vettori formano angoli uguali fra loro.*

   Poiché $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = 0$ i tre vettori sono planari. sia O il loro punto di applicazione, e $P1, P2$ i punti tali che $\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{e_1}$, $\overrightarrow{OP_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, quindi $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{e_2}$ applicato in P_1 ed infine $\overrightarrow{P_2O} = \mathbf{e_3}$ applicato in P_2, poiché $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2O} = \overrightarrow{OO} = 0 = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$. Quindi il triangolo di vertici $O, P_1, P2$ ha lati eguali per ipotesi, quindi ha angoli eguali, quindi angoli esterni eguali. Ma questi ultimi sono gli angoli tra i tre vettori applicati in 0, essendo i vettori paralleli ai lati.

   Soluzione alternativa. Si fissi un sistema di riferimento ortonormale nel piano determinato dai tre vettori, e centro il loro comune punto di applicazione O. Se $v = (a; b), w = (\alpha, \beta)$ in tale riferimento ortonormale si ha che $\sqrt{a^2 + b^2} = |v|$ è la lunghezza di v. Per definizione $(v|w) = a\alpha + b\beta = |v| \cdot |w| \cos \widehat{vOw}$ quindi $(v|v) = |v|^2$, $(v|w) = (w|v)$. Inoltre $(\lambda v + w/\nu) = \lambda(v/\nu) + (w/\nu)$. Poiché $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} = 0$, moltiplicando tale relazione per $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{e_2}|\mathbf{e_1}) + (\mathbf{e_3}|\mathbf{e_1}) &= -(\mathbf{e_1}|\mathbf{e_1}) = -|\mathbf{e_1}|^2 = -1 \\ (\mathbf{e_1}|\mathbf{e_2}) + (\mathbf{e_3}|\mathbf{e_2}) &= -1 \\ (\mathbf{e_1}|\mathbf{e_3}) + (\mathbf{e_2}|\mathbf{e_3}) &= -1 \end{aligned}$$

   Dunque otteniamo $(\mathbf{e_3}|\mathbf{e_1}) = (\mathbf{e_3}\mathbf{e_2})$, $(\mathbf{e_2}|\mathbf{e_1}) = (\mathbf{e_2}|\mathbf{e_3})$ e $(\mathbf{e_1}|\mathbf{e_2}) = (\mathbf{e_1}|\mathbf{e_3})$ quindi $(\mathbf{e_1}|\mathbf{e_3}) = (\mathbf{e_2}|\mathbf{e_3}) = (\mathbf{e_1}|\mathbf{e_2})$. Essendo $|\mathbf{e_1}| = |\mathbf{e_2}| = |\mathbf{e_3}| = 1$ si ha $\cos \widehat{\mathbf{e_1}O\mathbf{e_3}} = \cos \widehat{\mathbf{e_2}O\mathbf{e_3}} = \cos \widehat{\mathbf{e_2}O\mathbf{e_3}}$. Sapendo inoltre che $(\mathbf{e_2}|\mathbf{e_1}) + (\mathbf{e_3}|\mathbf{e_2}) = \cos \widehat{\mathbf{e_1}O\mathbf{e_2}} + \cos \widehat{\mathbf{e_2}O\mathbf{e_3}} = -1$, si ha $\cos \widehat{\mathbf{e_1}O\mathbf{e_3}} = \cos \widehat{\mathbf{e_2}O\mathbf{e_3}} = \cos \widehat{\mathbf{e_1}O\mathbf{e_2}} = -\frac{1}{2}$. Dunque gli angoli convessi tra i tre vettori sono di 120^o.



5. *Mostrare che il raggio del cerchio inscritto ad un triangolo è S/p dove S è l'area del triangolo e p il semiperimetro.*

$$S = \frac{|AB| \cdot r}{2} + \frac{|BC| \cdot r}{2} + \frac{|CA| \cdot r}{2} = p \cdot r.$$