Esercizi
13 novembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Sia* $f : [a; b] \to \mathbf{R}$*, derivabile in ogni punto con funzione derivata continua in* $[a; b]$*. Si provi che vi è* M *per cui:* $\forall\ x,\ y \in [a; b] \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

   Per il teorema di Weierstraß la funzione $|f'|\colon [a; b] \to \mathbf{R}$ essendo continua, ammette valore massimo M. Dal teorema di Lagrange, dati comunque $x, y \in [a; b]$ esiste un punto $\xi \in [x, y]$ tale che $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, da cui
   $$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = |f'(\xi)| \leq M.$$

2. *Provare che* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, è costante se, per qualche* M $\forall\ x,\ y \in \mathbf{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$.

   Mostriamo che f è derivabile in ogni punto con derivata nulla. Per ipotesi, posto $h = y - x$ si ha $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq M|h|$ cioè $-M|h| \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq M|h|$ e per il teorema del confronto si ha
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 0.$$
   Essendo quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$, la funzione f dovrà essere costante.

3. *Si trovi il rettangolo, con lati paralleli agli assi cartesiani, interamente contenuto nel tronco di parabola:* $\{(x, y) :\ x^2 \leq y \leq 1\}$*, e di area massima.*

   Per ogni rettangolo $R = [x_0; x_1] \times [y_0; y_1]$ consideriamo il rettangolo $R' = [-x; x] \times [x^2; 1]$ con $x = \max\{|x_0|, |x_1|, \sqrt{y_0}\}$. Ovviamente, se R è contenuto nel tronco di parabola dato, anche R' lo è. Dunque è sufficiente cercare il rettangolo di area massima tra quelli della forma $R_x = [-x; x] \times [x^2; 1]$ con $x \in [0, 1]$. L'area di R_x è data da $A(x) = 2x(1 - x^2)$, la sua derivata è $A'(x) = 2 - 6x^3$ e si annulla per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Calcolando dunque $A(x)$ negli estremi 0 e 1 e nel punto $\frac{1}{\sqrt{3}}$ si trova che il massimo si ha in quest'ultimo punto. Dunque il rettangolo cercato è $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}] \times [1/3, 1]$.

4. *Si provi che l'insieme* $\{(x, y) :\ e^y + x \sin|x| = 1\}$*, ha tangente nel punto* $(0, 0)$*. Si calcoli la retta ortogonale a tale tangente e passante per il punto dato.*

   Esplicitando l'insieme in forma di grafico si ottiene il grafico della funzione $g(x) = \log(1 - x \sin|x|)$, $x \sin|x| < 1$. Notiamo che la funzione $f(x) = x \sin|x|$ è derivabile in ogni punto. Ovviamente la funzione è derivabile per $x \neq 0$. Nel caso $x = 0$ si trova che il rapporto incrementale $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin|h| \to 0$ per $h \to 0$. E quindi $f'(0) = 0$. In definitiva la funzione $g(x)$ è derivabile ove definita. La retta tangente al grafico di g nel punto 0 è per definizione il grafico della funzione lineare $y = g'(0)x + g(0)$ cioè $y = 0$. Quindi la retta ortogonale a tale tangente è la retta $x = 0$.