Esercizi
4 dicembre 1998
(Analisi I, C.d.L. Fisica)

1. *Si consideri*
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) *Si provi che tale integrale è definito e finito per ogni $\alpha > 0$.*
   Soluzione.La funzione integranda è positiva e continua (per $t > 0$), dunque è integrabile sull'intervallo $]0, +\infty[$. Proviamo ora che è sommabile. Notiamo che per $t \in]0, 1]$ si ha $0 \le t^{\alpha-1}e^{-t} \le t^{\alpha-1}$ quindi
$$0 \le \int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = 1/\alpha.$$
   Per $t \ge 1$ dobbiamo invece notare che $t^{\alpha-1}$ può essere stimato con l'esponenziale e^t. Ad esempio, sapendo che
$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^{t/2}} = 0$$
   ne deduciamo che esiste $t_0 > 0$ tale che per ogni $t > t_0$ si ha $t^{\alpha-1} \le e^{t/2}$ e dunque $t^{\alpha-1}e^{-t} \le e^{-t/2}$. Dunque otteniamo[1]
$$0 \le \int_{t_0}^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \le \int_{t_0}^\infty e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \le 2\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2.$$
   Siccome l'integrale $\int_1^{t_0} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ è ovviamente finito, anche l'integrale $\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ è somma di tre integrali finiti ed è quindi finito.

   (b) *Si provi quindi che $\Gamma(n+1) = n!$ per ogni intero positivo n (cioè ha le proprietà: $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$).*
   Si ha
$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$
   D'altra parte, integrando per parti si trova anche
$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty n t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = n\Gamma(n).\end{aligned}$$

2. *Provare che la funzione $f(x) = x\log x + 4x - x^2/2$ è invertibile in $[1, e]$. Detta g la funzione inversa, calcolare*
$$\int_{f(1)}^{f(e)} g(s)\,\mathrm{d}s.$$
   (Si tenga presente il significato geometrico dell'integrale.)

   Soluzione.Si ha $f'(x) = \log x + 1 + 4 - x = \log x - x + 5$ siccome se $x \in [1, e]$ si ha $\log x \in [0, 1]$ e $-x \in [-e, -1]$ in tale intervallo $f'(x)$ è strettamente positivo. Dunque in tale intervallo la funzione f è crescente e quindi invertibile.

[1] Si può ottenere una soluzione più semplice sapendo che per ogni $\beta > 0$ esiste $c > 0$ tale che se $t > 0$ allora $t^k \le ce^t$.

Sapendo che l'integrale di una funzione è l'area del sottografico, si nota che nel piano (x,s) il rettangolo $[0,e]\times[0,f(e)]$ è formato dai tre pezzi: $[0,1]\times[0,f(1)]$, il sottografico di f e il sottografico di g.

Dunque

$$\begin{aligned}\int_{f(1)}^{f(e)} g(s)\,\mathrm{d}s &= ef(e)-f(1)-\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= e(e+4e-e^2/2)-4+1/2-\int_1^e (x\log x+4x-x^2/2)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

integrando per parti $x\log x$

$$\begin{aligned}&= 5e^2-e^3/2-7/2-\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e+\int_1^e x/2\,\mathrm{d}x-\left[2x^2-\frac{x^3}{6}\right]_1^e\\ &= 5e^2-e^3/2-7/2-e^2/2+\left[x^2/4\right]_1^e-2e^2+e^3/6+2-1/6\\ &= 5e^2-e^3/2-7/2-e^2/2+e^2/4-1/4-2e^2+e^3/6+2-1/6\\ &= -e^3/3+11/4e^2-23/12.\end{aligned}$$

Un'alternativa è calcolare l'integrale per sostituzione:

$$\begin{aligned}s &= f(x)\\ ds &= f'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_{f(1)}^{f(e)} g(s)\,\mathrm{d}s &= \int_1^e xf'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_1^e (x\log x-x^2+5x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e-\int_1^e x/2\,\mathrm{d}x+\left[-x^3/3+5x^2/2\right]_1^e\\ &= \left[x^2/2\log x-x^2/4-x^3/3+5x^2/2\right]_1^e\\ &= e^2/2-e^2/4-e^3/3+5e^2/2+1/4+1/3-5/2\\ &= -e^3/3+11e^2/4-23/12.\end{aligned}$$

3. (a) *Si consideri la funzione*

$$\Theta(\beta)=\int_1^\infty \frac{\sin(\beta^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Provare che la funzione Θ è continua e derivabile nei $\beta>0$. Si osservi invece che la derivata rispetto a β dell'integranda non è integrabile nemmeno in senso improprio.

• **Il testo è sbagliato. In effetti come provato in quanto segue la derivata dell'integranda è integrabile in senso improprio, pur non essendo integrabile in senso generalizzato.**

<u>Soluzione.</u>Notiamo innanzitutto che l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sin(\beta^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}y$$

esiste in senso generalizzato ed è finito. Infatti la funzione integranda è misurabile in quanto continua ed è sommabile poiché il suo modulo è minore di $\frac{1}{x^2}$ e quest'ultima funzione è sommabile su $[1, \infty[$.
In generale, per ogni $\beta > 0$ si ha (pongo $y = \beta x$):

$$\Theta(\beta) = \int_1^{\infty} \frac{\sin(\beta^2 x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \beta \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin y^2}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

Quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale la nostra funzione $\Theta(\beta)$ è derivabile e la sua derivata è

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{\sin y^2}{y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{\sin \beta^2}{\beta}.$$

La derivata rispetto a β della funzione integranda è

$$2\beta \cos(\beta^2 x^2)$$

Dunque si ha

$$\int_1^c 2\beta \cos(\beta^2 x^2)\,\mathrm{d}x = \int_1^c \frac{2x\beta^2 \cos(\beta^2 x^2)}{\beta x}\,\mathrm{d}x$$

integrando per parti

$$= \left[\frac{\sin \beta^2 x^2}{\beta x}\right]_1^c + \int_1^c \frac{\sin \beta^2 x^2}{\beta x^2}\,\mathrm{d}y$$

che ha limite per $c \to +\infty$

$$-\frac{\sin \beta^2}{\beta} + \int_{\beta}^{+\infty} \frac{\sin y^2}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

che è proprio $\Theta'(\beta)$. Quindi la derivata dell'integranda è integrabile in senso improprio.

Però non è integrabile in senso generalizzato poiché le parti positiva e negativa di $\cos \beta^2 x^2$ sono rispettivamente maggiore delle parti positiva e negativa di $\frac{\cos \beta^2 x^2}{x}$ per $x > 1$. D'altronde gli integrali di tali funzioni si trasformano con il cambiamento di variabile $x^2 = y$ negli integrali delle parti positiva e negativa di $\frac{\cos \beta^2 y}{2y}$. Ripetendo i calcoli dell'esempio 7.20 pag. 182 del libro di testo si ha che quest'ultime funzioni non sono sommabili. Quindi la funzione $\cos \beta^2 x^2$ non è integrabile in senso generalizzato rispetto alla variabile x sulle semirette.

(b) *Si consideri la funzione*

$$\Lambda(\beta) = \int_1^2 t^\beta e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

definita per ogni β. Si provi che Λ è una funzione continua. Si provi anche che è derivabile e la derivata è

$$\Lambda'(\beta) = \int_1^2 t^\beta \log t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

<u>Soluzione.</u> Si considera

$$\frac{\Lambda(\beta+h)-\Lambda(\beta)}{h} - \int_1^2 t^\beta \log t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^2 \Big(\frac{t^{\beta+h}-t^\beta}{h} - t^\beta \log t\Big)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

osservando che l'integranda della candidata derivata di Λ é proprio la derivata rispetto a β dell'integranda di Λ, per il teorema di Lagrange si ha, per opportuni $\gamma = \gamma(t,h,\beta)$ compresi tra β e $\beta+h$

$$= \int_1^2 (t^\gamma \log t - t^\beta \log t)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

quindi per la diseguaglianza triangolare degli integrali

$$\left|\frac{\Lambda(\beta+h)-\Lambda(\beta)}{h} - \int_1^2 t^\beta \log t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \;\le\; \int_1^2 |t^{\gamma-\beta}-1| t^\beta |\log t| e^{-t} dt$$

Osservando che se $t \ge 1$ allora $t^{|c|}-1 \ge |t^c - 1|$, in quanto $t^c + 1/t^c \ge 2$, si ha

$$\left|\frac{\Lambda(\beta+h)-\Lambda(\beta)}{h} - \int_1^2 t^\beta \log t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| \;\le$$

$$\int_1^2 (t^{|h|}-1) t^\beta |\log t| e^{-t} dt \;\le\; (2^{|h|}-1)\int_1^2 t^\beta |\log t| e^{-t} dt$$

che è infinitesimo per $h \to 0$.