Compito di Analisi II/A
17 settembre 1998

1. *Trovare la funzione $x(t)$ tale che*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$$

sapendo che $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$.

Soluzione. Si tratta di una equazione del secondo ordine, lineare, omogenea, a coefficienti costanti. Gli zeri del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Dunque la soluzione generale è $x(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{2t}$ e quindi $x(0) = c_1 + c_2 = 0$, $x(1) = c_1 \mathrm{e} + c_2 \mathrm{e}^2 = 1$ da cui si trova

$$x(t) = \frac{e^t - e^{2t}}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^2}.$$

2. *Trovare massimi e minimi assoluti della funzione*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

sulla corona circolare $D = \{(x,y)\colon \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1\}$.

Soluzione. Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Perché si annullino entrambe le derivate deve essere $y = \pm x$. Per $x = y$ si ha $f(x,y) = 1/2$, per $x = -y$ si ha $f(x,y) = -1/2$. Cerchiamo i massimi e minimi di f sul bordo del dominio. Sulla circonferenza di raggio r (per $r = 1, 1/2$), posto $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ si ha

$$g(\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

La funzione $\sin(2\theta)$ per $\theta \in [0, 2\pi]$ assume massimo in $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ e minimo in $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ che corrispondono ai punti delle due circonferenze che intersecano le rette $x = y$ e $x = -y$ che abbiamo già analizzato. In definitiva abbiamo massimi assoluti nei punti $\{x = y\} \cap D$ in cui la funzione vale $1/2$ e minimi assoluti nei punti $\{x = -y\} \cap D$ in cui la funzione vale $-1/2$.

Soluzione alternativa. Ci mettiamo in coordinate polari: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. La funzione diventa

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

Dunque la funzione dipende solo da θ e ha massimo per $\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$ ($f(\theta) = \frac{1}{2}$) e minimo per $\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ ($f(\theta) = -\frac{1}{2}$).

3. *Si consideri la seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x^2+1)^\alpha}{k^2}.$$

Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ c'è convergenza puntuale e per quali α c'è convergenza uniforme.

Soluzione. Notiamo che

$$f_n(x) = (x^2+1)^\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

e dunque la successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = (x^2+1)^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$. Sia ora $g_k(x) = \frac{(x^2+1)^\alpha}{k^2}$. Se $\alpha \leq 0$ notiamo che $(x^2+1)^\alpha \leq 1$ e quindi

$$||g_k|| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \frac{(x^2+1)^\alpha}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

e siccome $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$ si ha che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ è totalmente convergente e quindi la successione $f_n(x)$ converge uniformemente.

D'altra parte ricordiamo che se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ converge uniformemente, necessariamente si deve avere $\lim_{k\to\infty} ||g_k|| = 0$. Ma nel caso $\alpha < 0$ le funzioni $g_k(x)$ non sono limitate, anzi si ha $\lim_{x\to\infty} g_k(x) = +\infty$ e quindi $||g_k|| = +\infty$ e la serie non può convergere uniformemente.

Soluzione alternativa. Per studiare la convergenza uniforme si può anche procedere nel modo seguente. Calcoliamo

$$\begin{aligned} ||f_n - f|| &= \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| (x^2+1)^\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sup_{x\in\mathbf{R}} (x^2+1)^\alpha. \end{aligned}$$

Nel caso $\alpha \geq 0$ essendo $\sup_{x\in\mathbf{R}}(x^2+1)^\alpha = 1$ si trova

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 0$$

e quindi la serie converge uniformemente. Nel caso $\alpha < 0$ si ha $\sup_{x\in\mathbf{R}}(x^2+1)^\alpha = \infty$ e quindi $||f_n - f|| = \infty$ e la successione non converge uniformemente.