RICEVIMENTO 12

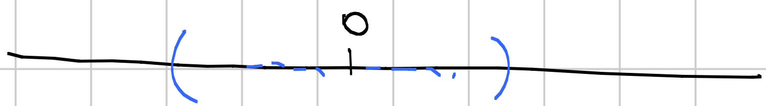
<u>Test. 2000/1</u> $n a_n \to 11 \Rightarrow a_n$ è limitata

definitivamente $10 \le n a_n \le 12$

$\Rightarrow$ defin. $\frac{10}{n} \le a_n \le \frac{12}{n}$

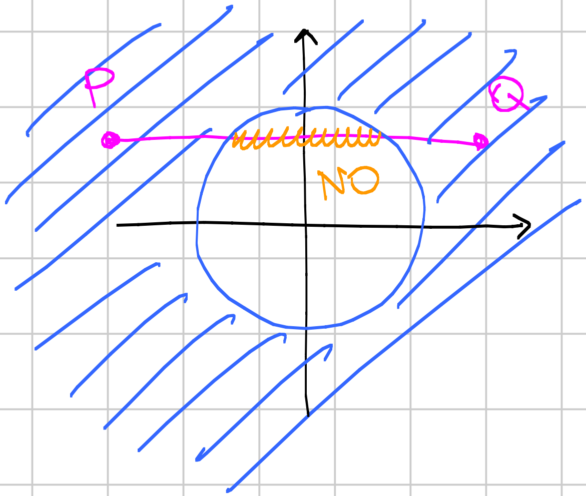
$\Rightarrow$ definitiv. è limitata. Prima restano solo un numero finito di termini $\to$ limitati.

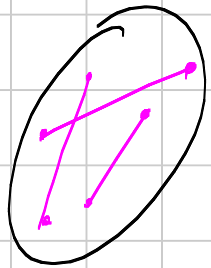
Volendo: $a_n \to 0$ per i carabinieri



Test 2003 / 1.1

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 3\}$ è convesso





Non convesso

$\boxed{\text{Test 2003/3}}$

$1-\cosh x = o(x^2)$ per $x \to 0^+$ FALSA

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$1-\cosh x = \cancel{1} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$\boxed{\text{Test } 2000/7}$ $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ arctan $a_n \to 0$ VERO

$\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ $a_n \to 0$ (condiz. necessaria)

$\Rightarrow$ arctan $a_n \to$ arctan $0 = 0$ (arctan è continua)

$\boxed{\text{Test } 2006/5}$ $u'' = u \cos t$ è lineare e omogenea? SI

$u'' - \cos t \cdot u = 0$ $\qquad \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{a_2(t)}\, u'' + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_1(t)}\, u' + \underset{\overset{\shortparallel}{-\cos t}}{a_0(t)}\, u = 0$

$\boxed{\text{Test } 2003/5}$ $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 8 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to 8$ VERA

CRITERIO RAPPORTO $\to$ RADICE

$\boxed{\text{Test } 2004/4}$ ← INFORMATICA

$x=1$ è p.to min. rel. per $f(x) = x^4+4$ FALSO

Se fosse p.to di min. rel. dovrebbe essere $f'(1)=0$, e non lo è

$\boxed{\text{Test } 2007/1}$ $f(x,y) = x^2 e^y$ ha infiniti p.ti stazionari? $\boxed{\text{SI}}$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x e^y = 0 & \rightarrow x=0 \\ x^2 e^y = 0 & \rightarrow x=0 \end{cases}$$

Tutti i punti con $x=0$, cioè tutti i punti dell'asse y, sono stazionari.

$\boxed{\text{Test. } 1999/6}$ $a_n \rightarrow 4 \Rightarrow 2\underbrace{\boxed{a_n}}_{2\cdot 4} + \underbrace{\boxed{a_{2n}}}_{4} \rightarrow 12$ VERO

sottosuccessione

$\boxed{\text{Es. scritta 2001.1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^e} - n^{e^n}}{n^{n^e} - e^{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\boxed{e^{n^e \log e}}}^{\text{ULTIMO}} - \overbrace{\boxed{e^{e^n \log n}}}^{\text{PIÙ FORTE}}}{\underbrace{\boxed{e^{n^e \log n}}}_{\text{TERZO}} - \underbrace{\boxed{e^{e^n \log e}}}_{\text{SECONDO}}} = +\infty$$

$$= \frac{-\infty}{-\infty}$$

Per farlo rigorosamente bisogna raccogliere il + forte.

$\boxed{\text{Test 2006/2}}$ $\quad \mathrm{Max}\,\{x-6y : \underbrace{x\in[0,3],\ y\in[0,1]}_{A}\} = 3$

Se voglio $x-6y$ + grande possibile devo usare x + grande poss, e y + piccolo possibile (per togliere meno possibile)

$\Rightarrow x=3,\ y=0$ $\qquad \min\{\text{stesso insieme}\} = -6$

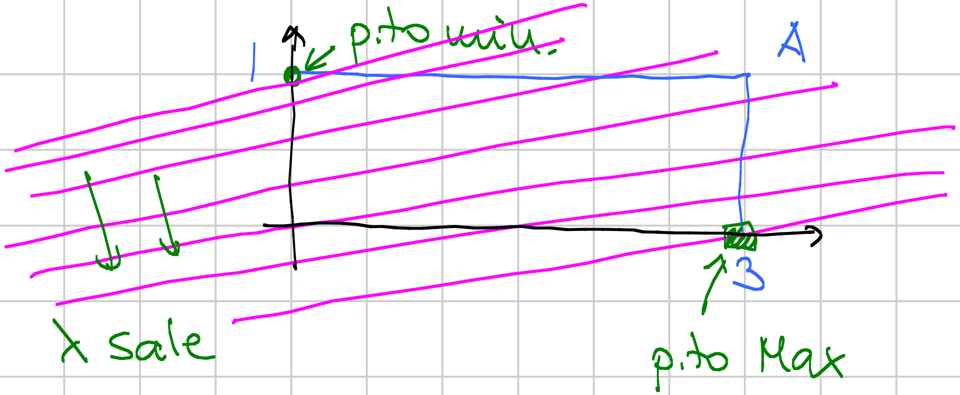
p.to di min. : $(0,1)$

Con le linee di livello

$x - 6y = \lambda$

$6y = x - \lambda$

$y = \frac{1}{6}x - \frac{\lambda}{6}$



— o — o —

$\boxed{\text{Test } 2002/3.1}$

$$\inf\left\{\alpha > 0 \; ; \; \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{2\alpha}}\,dx \text{ converge}\right\} = \frac{1}{2}$$

se fosse $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx$ questo convergerebbe $\Leftrightarrow 2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$

Con il $\log x$ non cambia nulla

— o — o —

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x}\,dx \qquad \alpha > 0$ non converge mai

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x \log^\alpha x}\,dx \quad \text{converge} \iff \alpha > 1 \quad \text{(tabellina)}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\log^{300} x}{x^{2\alpha}}\,dx \quad \text{converge} \iff 2\alpha > 1$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\log(1+7^x)}{x^{2\alpha}}\,dx \quad \text{converge} \iff 2\alpha > 2$$

$$\frac{\log(1+7^x)}{x^{2\alpha}} \sim \frac{\log 7^x}{x^{2\alpha}} = \frac{x \log 7}{x^{2\alpha}} = \frac{\log 7}{x^{2\alpha-1}} \qquad 2\alpha - 1 > 1$$

—o—o—

$\boxed{\text{Es. Scritto 2001.1}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^3}{n^3+5n^4+8}}}_{a_n} \qquad \text{CONVERGE}$$

Leibnitz.

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to 0$

FACILI

(ii) $a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

$$a_n = \frac{1}{5n+1+\frac{8}{n^3}} \qquad\qquad a_{n+1} \overset{?}{\le} a_n$$

$$\frac{1}{5(n+1)+1+\frac{8}{(n+1)^3}} \overset{?}{\le} \frac{1}{5n+1+\frac{8}{n^3}}$$

$$\cancel{5n} + \cancel{1} + \frac{8}{n^3} \overset{?}{\le} \cancel{5n} + 5 + \cancel{1} + \frac{8}{(n+1)^3}$$

$$\underbrace{\frac{8}{n^3} - \frac{8}{(n+1)^3}}_{\downarrow\, 0} \overset{?}{\le} 5$$

sicuramente vera, almeno DEFINITIVAMENTE

In alternativa, aggiungo e tolgo $\frac{1}{5n}$

$$\sum \text{iniziale} = \sum (-1)^n \left\{ \frac{n^3}{n^3+5n^4+8} - \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} \right\} =$$

$$= \sum (-1)^n \underbrace{\left[\frac{n^3}{n^3+5n^4+8} - \frac{1}{5n} \right]} + \underbrace{\sum (-1)^n \frac{1}{5n}}_{\text{CONVERGE PER LEIBNITZ FACILE}}$$

$$\frac{\cancel{5n^4} - n^3 - \cancel{5n^4} - 8}{5n\left(n^3+5n^4+8\right)} \sim \frac{-n^3}{25n^5}$$

$\Rightarrow$ la 1ª serie converge assolutamente per C.A. con $\frac{1}{n^2}$

—o—o—

$\boxed{\text{Test 2002/2.3}}$

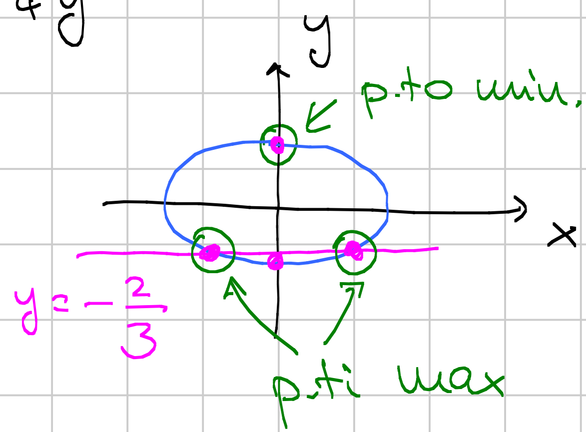
$$\max\left\{x \in \mathbb{R} : (x-8)\arctan e^{x^2} \le 0\right\} = 8$$

MONDO x: → risolvere la disequazione
→ prendere il max dell'insieme delle soluzioni

$$(x-8)\underbrace{\boxed{\arctan\left(e^{x^2}\right)}}_{\text{ROBA SEMPRE } >0} \le 0 \iff x-8 \le 0 \iff x \le 8$$

$\boxed{\text{Scritto 2007/2 ES. 3}}$ $f(x,y) = x^2 + y^3 - 4y$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1 \}$$



W ⇒ max. e min. esistono

sing. interni ⇒ $\emptyset$ Staz. interni:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \to x = 0 \\ \to y^2 = \frac{4}{3} \to y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array} \quad \underbrace{\left(0, \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right)}_{\text{Non sono interni}}$$

Bordo con moltiplicatori

1° sistema: nessuna soluz. (fare!)

2° sistema:

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \\ 3y^2 - 4 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

1^a eq. $\quad x(\lambda-1)=0$

$x=0$ $\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $2y^2=1$ $\rightarrow$ $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\rightarrow$ $\left(0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\lambda=1$ $\xrightarrow{2^a \text{ eq.}}$

$$3y^2-4=4y$$

$$3y^2-4y-4=0$$

$$y=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\frac{2\pm4}{3} \begin{cases} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$y=2$ $\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $x^2+8=1$ $\rightarrow$ NULLA

$y=-\frac{2}{3}$ $\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $x^2+2\cdot\frac{4}{9}=1$

$$x^2=\frac{1}{9}$$

$$x=\pm\frac{1}{3}$$

$$\left(\pm\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Candidati: $\left(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\pm \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

p.to min.

$$f\left(\boxed{0, \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{8}_4} - \cancel{4}^{2} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{4} - 2\right) = \boxed{-\frac{7}{4}\sqrt{2}}$$ MINIMO

$$f\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{8} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{4}\sqrt{2}$$

2 p.ti max

$$f\left(\boxed{\pm\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{9} - \frac{8}{27} + \frac{8}{3} = \frac{3 - 8 + 72}{27} = \boxed{\frac{67}{27}}$$ MAX

$$\frac{7}{4}\sqrt{2} \overset{?}{<} \frac{67}{27} \qquad 189\sqrt{2} \overset{?}{<} 268 \qquad 189 \cdot 2 \overset{?}{<} 268\sqrt{2}$$

$$189 \overset{\text{SI}}{<} 134\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{Scritto 2006.3 Es. 4}}$ $\quad u'' - 6u' + 10u = \sin t \qquad u(0) = 0$

$u'(0) = 0$

$x^2 - 6x + 10 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9 - 10} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$

Sol. gen. eq. omogenea: $\quad u(t) = a e^{3t} \cos t + b e^{3t} \sin t$

Cerco soluzione della non omog. del tipo $u(t) = a \sin t + b \cos t$

trovo $\quad u(t) = \frac{1}{13} \sin t + \frac{2}{39} \cos t$

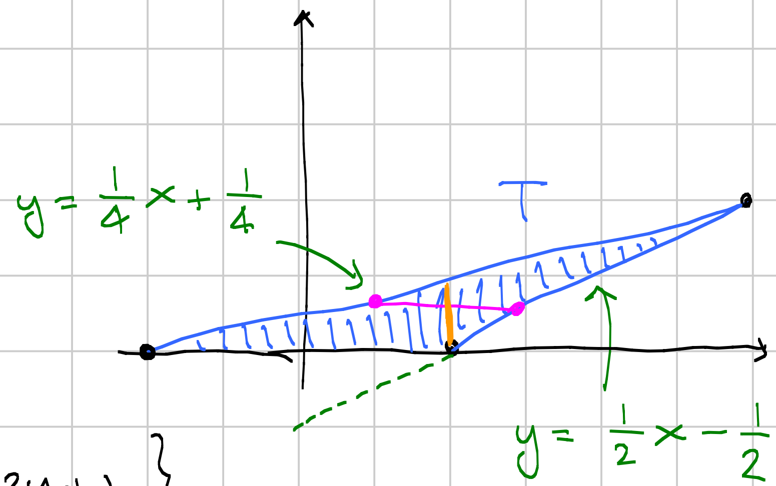
Sol. gen. eq. non omogenea:

$$u(t) = a e^{3t} \cos t + b e^{3t} \sin t + \frac{1}{13} \sin t + \frac{2}{39} \cos t$$

Calcolo a e b con le condiz. iniz.

Scritto 2003. 4

$$\iint_T (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$



$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ y\in[0,1],\ 4y-1\le x\le 2y+1\}$$

$$=\int_0^1 dy\int_{4y-1}^{2y+1} dx\,(x^2+y^2) = \int_0^1 dy\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x=4y-1}^{x=2y+1} =$$

$$=\int_0^1 dy\left\{\frac{(2y+1)^3}{3}+y^2(2y+1)-\frac{(4y-1)^3}{3}-y^2(4y-1)\right\} =$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{3}\left[8\cancel{y^3}+\cancel{12y^2}+6y+1-\cancel{64y^3}+\cancel{48y^2}-12y+1\right]+\left[2y^3+y^2-4y^3+y^2\right]$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\left[-56y^3 + 60y^2 - 6y + 2 \right] + \left[-2y^3 + 2y^2 \right] \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{62}{3}y^3 + 22y^2 - 2y + \frac{2}{3} \right) dy = \left[-\frac{62}{12}y^4 + \frac{22}{3}y^3 - y^2 + \frac{2}{3}y \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= -\frac{62}{12} + \frac{22}{3} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{-62 + 88 - 12 + 8}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$$

Normale rispetto all' asse x sarebbe stato

$$\iint_T \dots = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}} dy \dots + \int_1^3 dx \int_{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}} dy \dots$$

$\boxed{\text{Scritto 2002/03 \quad Es. 3}}$ $\qquad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \qquad a_{2002} = \frac{1}{2002}$

(a) Dimostrare che è limitata.

Dimostriamo per induzione che $\quad 0 \leq a_n \leq 87 \quad \forall n \geq 2002$

BANALE (e lo sarebbe stato anche con 1 al posto di 0)

$\boxed{n=2002}$ $\quad a_{2002} = \frac{1}{2002} \leq 87 \quad$ SI,

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $a_n \leq 87 \qquad$ Tesi: $a_{n+1} \leq 87$

Dim. $\quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n} + \frac{1}{n} \leq \sqrt[n]{87} + \frac{1}{n} \leq \sqrt[2]{87} + 1 \leq 11 \leq 87$

Uso Hp. + fatto che $\sqrt[n]{\ }$ è crescente

(b) Trovare il limite

$$\boxed{1} \leq \boxed{a_{n+1}} \leq \boxed{\sqrt[n]{87}} + \boxed{\frac{1}{n}}$$

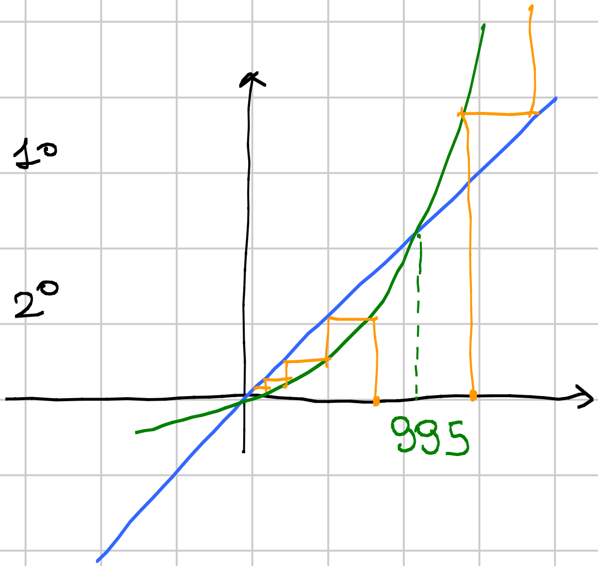
$1 \to 1$, $a_{n+1} \to 1$, $\sqrt[n]{87} \to 1$, $\frac{1}{n} \to 0$

Scritto 2003/1 Es. 3

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 5a_n}{1000} \qquad a_0 = \alpha > 0$$

IDEA

- $0 < \alpha < 995 \Rightarrow a_n \to 0$ decrescendo 1°
- $\alpha = 995$ a_n vale sempre 995
- $\alpha > 995 \Rightarrow a_n \to +\infty$ crescendo 2°



PIANO per 1° caso

(i) $0 \leq a_n \leq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

Dim (iv)

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 5a_n}{1000}$$

$$\ell = \frac{\ell^2 + 5\ell}{1000} \Rightarrow \ell = \begin{cases} 0 \\ 995 \leftarrow \text{INCOMPATIBILE CON (i)} \end{cases}$$

Conviene considerare $f(x) = \frac{x^2+5x}{1000}$ e dimostrare che

- $f(x) > x$ per $x > 995$
  $f(x) = x$ per $x = 995$
  $f(x) < x$ per $0 < x < 995$

- $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$

Dim (i) INDUZIONE $n=0$ banale

$\boxed{P.I.}$ Ipotesi $0 \leq a_n \leq \alpha$ Tesi $0 \leq a_{n+1} \leq \alpha$

Dim. prendo l'Hp e applico $f(x)$ che so essere crescente

$$0 \leq a_n \leq \alpha \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} f(0) & \leq & f(a_n) & \leq & f(\alpha) & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ 0 & \leq & a_{n+1} & \leq & f(\alpha) & \leq & \alpha \end{array}$$

vero perché $\alpha \in (0, 995)$

Dim (ii) $a_{n+1} \le a_n \iff f(a_n) \le a_n$

VERO se $a_n \in [0, 3.95]$, che

a sua volta è vero per pto (i)

— o — o —

$\boxed{\text{Scritto 1999.6 \quad Es. 4}}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{|x-3|}} = \int_2^3 + \int_3^5 + \int_5^{+\infty}$$

$$\int_3^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-3}} = \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{|x-3|}} = \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{3-x}} = \text{uguale} \dots$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-3}} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{2\cancel{y}\,dy}{(y^2+3)\cancel{y}} = 2\int \frac{dy}{y^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} \dots$$

$\sqrt{x-3} = y$

$x - 3 = y^2$

$x = y^2 + 3 \qquad dx = 2y\,dy$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3-x}} = \int \frac{-2y\,dy}{(3-y^2)\,y} = -2\int \frac{dy}{3-y^2} = 2\int \frac{dy}{y^2-3}$$

$\sqrt{3-x} = y$

$3-x = y^2$

$x = 3-y^2$

$dx = -2y\,dy$