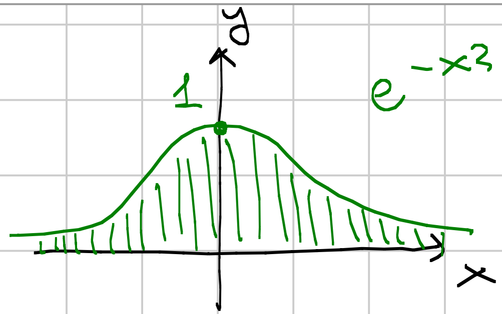
MATEMATICA I

ORA 100

Titolo nota 19/12/2007

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \overset{\text{PARI}}{=} 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$



$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge, ad esempio perché

$$e^{-x^2} \le e^{-x} \qquad \text{per } x \ge 1$$

$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge (dimostrato con la definizione)

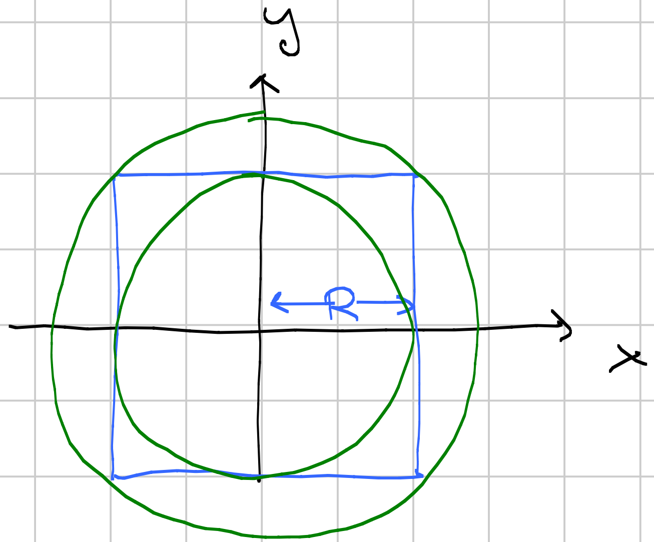
$$\Downarrow$$

$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge

Come calcolare il valore a cui converge

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \underbrace{\int_0^R e^{-x^2}\,dx}_{I(R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow$$ integrale iniziale fa $\sqrt{\pi}$

Passiamo in 2 variabili



cerchio interno → raggio R $\quad C_R$

cerchio esterno → raggio $R\sqrt{2}$ $\quad C_{R\sqrt{2}}$

Quadrato → Q_R

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \iint_{C_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

perché l'integranda è positiva, quindi + è grande l'insieme, + è grande l'integrale

$$\iint_{Q_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} dy\; e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}$$

$$= \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-y^2}dy}_{2I(R)} = 2I(R)\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx$$

$$= 4\left[I(R)\right]^2$$

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta}_{C_R \text{ in coord. polari}}\; \underbrace{e^{-\rho^2}}_{e^{-x^2-y^2}} \cdot \underbrace{\rho}_{J} = \int_0^R \rho e^{-\rho^2}d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho e^{-\rho^2}d\rho = 2\pi\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=R} = \pi\left[-e^{-R^2}+1\right]$$

$$\iint_{C_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \text{stessa cosa con } R\sqrt{2} \text{ al posto di } R$$

$$= \pi\left[-e^{-2R^2}+1\right]$$

Torniamo alla disuguaglianza

$$\iint_{C_R} \dots \leq \iint_{Q_R} \dots \leq \iint_{C_{R\sqrt{2}}} \dots$$

$$\boxed{\pi\left[1-e^{-R^2}\right]} \leq \boxed{4\left[I(R)\right]^2} \leq \boxed{\pi\left[1-e^{-2R^2}\right]}$$

$R \to +\infty$ ↓ π carabinieri ↓ π ↓ π

$$\lim_{R\to+\infty} 4\left[I(R)\right]^2 = \pi \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Esercizio 2   Sia

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, \ y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

Domanda: $\mathrm{Vol}(A) = ?$

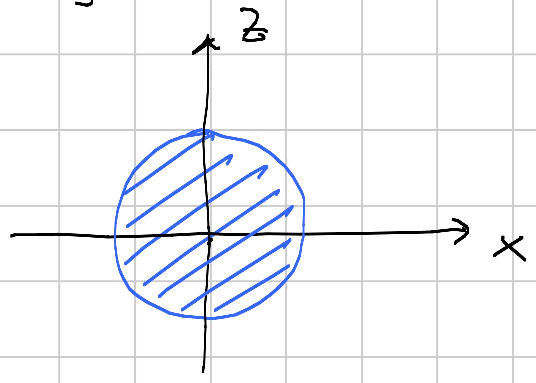
A è limitato? $x^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow$ $x \in [-1,1]$, $z \in [-1,1]$

$y^2 + z^2 \leq 1 \Rightarrow$ anche $y \in [-1,1]$

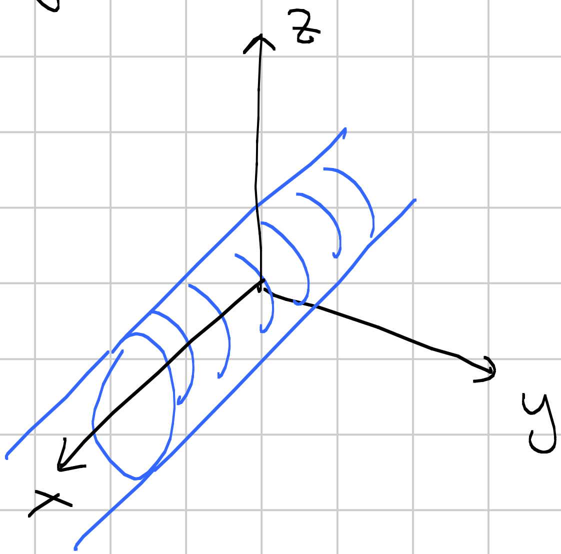
A è contenuto nel cubo $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$

Cosa rappresenta: $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1 \}$

Rappresenta il cilindro infinito con asse coincidente con l'asse y e raggio 1.



$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq 1\}$ = cilindro infinito con asse lungo asse x



$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+z^2 \leq 1}_{\text{stare nel } 1^\circ \text{ cilindro}},\ \underbrace{y^2+z^2 \leq 1}_{\text{stare nel } 2^\circ \text{ cilindro}}\}$$

= intersezione dei 2 cilindri

= "volta a croce"

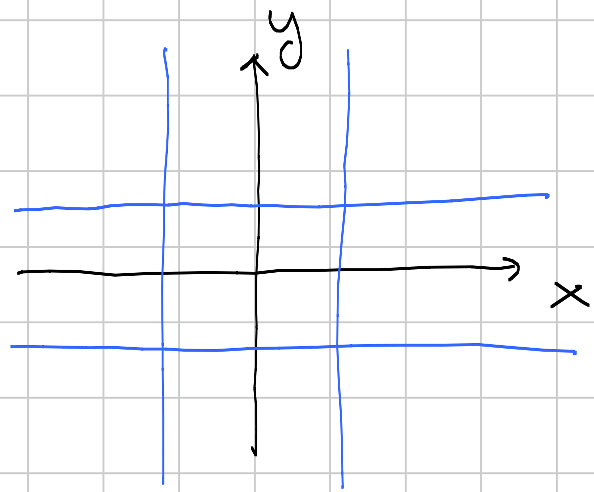
Calcoliamo il volume

per sezioni asse z

$$\mathrm{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx\,dy\,dz \overset{\downarrow}{=} \int_{z_{min}}^{z_{max}} dz \iint_{S_z} 1 \, dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} dz \, \mathrm{Area}(S_z)$$

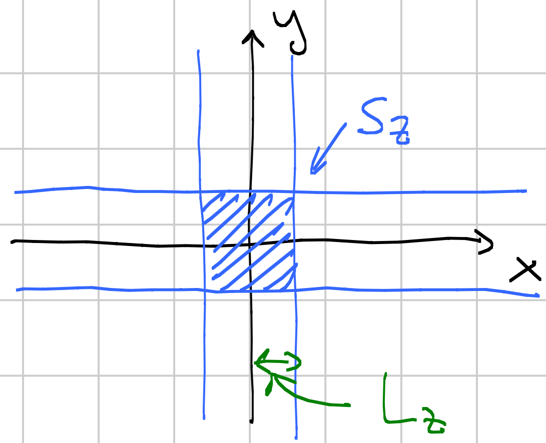
Chi è S_z ? Guardiamo dall'alto



Supponiamo di tagliare con un piano ad altezza z dal piano base.

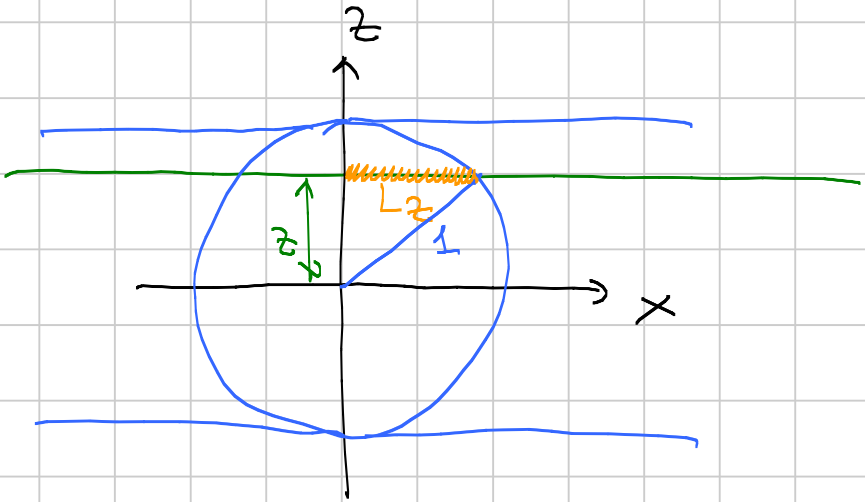
Ogni cilindro viene tagliato in una striscia infinita il cui spessore dipende da z

$\Rightarrow S_z$ è un quadrato di lato $2L_z$



Quanto vale L_z ?

Guardiamo di lato



piano ad altezza z

$$z^2 + (L_z)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad L_z = \sqrt{1 - z^2}$$

Controlli: per $z = 0 \to L_z = 1$

per $z = \pm 1 \to L_z = 0$

Conclusione:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_{-1}^{1} \mathrm{area}(S_z)\,dz = \int_{-1}^{1} 4L_z^2\,dz = 4\int_{-1}^{1}(1-z^2)\,dz$$

$$= 4\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=-1}^{z=1} = 4\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$\boxed{\text{PROBLEMA HARD}}$ E se ci fosse anche il terzo cilindro?

$x^2+y^2\leq 1$