MATEMATICA I

ORA 99

Titolo nota 19/12/2007

SISTEMI DI EQ. DIFFERENZIALI

$$\begin{cases} u' = 4u - v \\ v' = 2u + v \end{cases}$$

Incognite $u(t)$, $v(t)$

Sistema lineare e omogeneo a coeff. costanti

Derivo la 1ª equazione; $u'' = 4u' - v' = 4u' - 2u - v = 4u' - 2u + u' - 4u$

uso v' della 2ª eq.

ricavo v dalla 1ª eq.

In conclusione $u'' = 5u' - 6u \to u'' - 5u' + 6u = 0$

Sistema di 2 equazioni del 1° ordine $\rightsquigarrow$ equazione singola di ordine 2.

$u'' - 5u' + 6u = 0 \rightsquigarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (x-3)(x-2) = 0$

$\rightsquigarrow x = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{u(t) = ae^{2t} + be^{3t}}$

Una volta nota u, ricavo v usando la I equazione

$v(t) = 4u(t) - u'(t) = 4ae^{2t} + 4be^{3t} - 2ae^{2t} - 3be^{3t}$

$$\boxed{v(t) = 2ae^{2t} + be^{3t}}$$

Condizioni iniziali saranno del tipo $u(0) =$ qualcosa
$v(0) =$ qualcos'altro

Le condizioni iniziali permettono di ricavare a e b.

<u>Oss.</u> Le costanti libere sono 2: una fissate aeb nella u sono fissate nella v

$u' = 4u - v$
$v' = 2u + v$ $\rightsquigarrow$ Matrice associata

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sono λ, μ

$\lambda \cdot \mu = \text{Det}(A) = 6$ $\qquad$ $\lambda + \mu = \text{Traccia}(A) =$ somma el. diagonale $= 5$

Quindi autovalori $= \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$

Autovettori della matrice sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ relativo all'autov. 2

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ " " 3

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

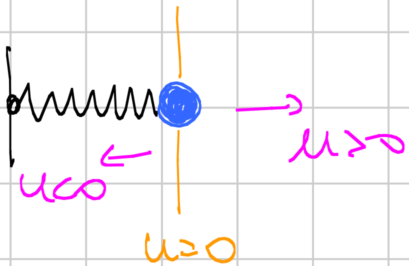
<u>Esercizio</u> $\quad u'' + \alpha u' + 4u = 0$

Per quali valori di α le soluzioni sono limitate per $t \geq 0$.

$\boxed{\alpha = 0}$ $\quad u'' + 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 4 = 0 \rightsquigarrow x^2 = -4 \rightsquigarrow x = \pm 2i$

$\rightsquigarrow u(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t) \rightsquigarrow$ soluz. periodiche $\rightsquigarrow$ limitate

u descrive lo spostamento della pallina dalla posizione di riposo.

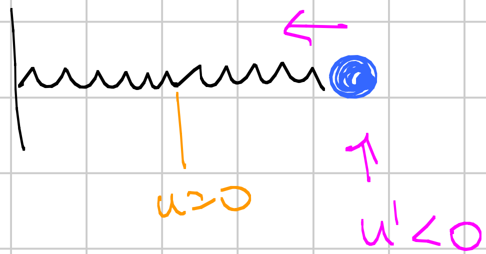


accelerazione.

$u'' = -4u$

Significato fisico di $\alpha u'$

$$u'' = -4u - \underbrace{\alpha u'}_{\text{rema contro l'accelerazione}}$$



$\alpha > 0$

Rappresenta l'attrito

Matematicamente: $u'' + \alpha u' + 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 + \alpha x + 4 = 0$

Questa equazione ha 2 soluzioni λ, μ con $\lambda \cdot \mu = 4$ e $\lambda + \mu = -\alpha$

- se le soluzioni sono reali: prod. >0, somma <0 $\Rightarrow$ 2 soluzioni negative

$$u(t) = a e^{\lambda t} + b e^{\mu t}$$ tende a zero per $t \to +\infty$

- se le soluzioni sono complesse coniugate $c \pm id$

Somma delle radici è $2c = -\alpha \Rightarrow c < 0$

$$u(t) = a e^{ct} \cos(dt) + b e^{ct} \sin(dt)$$

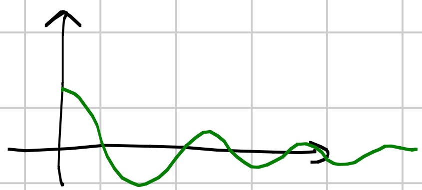
Quando $t \to +\infty$ $u(t) \to 0$

Domanda: differenza tra il caso di 2 radici reali e 2 radici complesse

Matematicamente: $\Delta = \alpha^2 - 16$ $\nearrow \alpha > 4$ radici reali $\searrow \alpha < 4$ radici complesse $(\alpha > 0)$

Nel caso $\alpha > 4$ $u(t) \to 0$ in maniera monotona

" " $\alpha < 4$ $u(t) \to 0$ oscillando



Per $\alpha < 0$ il discorso cambia totalmente $\to$ soluzioni non limitate per $t \geq 0$.

— o — o —

Esercizio $u(t) = a e^{-3t} + b e^{-2t}$

È sempre vero che u monotona per $t \geq 0$?

$a > 0,\ b > 0 \rightsquigarrow u(t)$ monotona decrescente

$a < 0,\ b < 0 \rightsquigarrow u(t)$ " crescente

$$u'(t) = -3a e^{-3t} - 2b e^{-2t} = 0$$

$$= e^{-3t}\left(-3a - 2b e^{t}\right) = -e^{-3t}\left(3a + 2b e^{t}\right) = 0$$

quando $3a + 2b e^{t} = 0$, cioè quando $e^{t} = \boxed{-\dfrac{3a}{2b}}$ se è > 0 ci sono soluzioni

$u'(t)$ si annulla da qualche parte $\Leftrightarrow$ $\frac{3a}{2b} < 0$

$\Leftrightarrow$ a e b hanno segno diverso

Se voglio $u(t)$ monotona per $t \geq 0$, serve che $u'(t)$ si annulli per un valore neg. di t, quindi

$-\frac{3a}{2b} \leq 1$ $\leftarrow$ sotto questa condizione l'eventuale annullamento è per un $t \leq 0$