MATEMATICA I ORA 98

Titolo nota 18/12/2007

Come calcolare la somma delle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Teorema 1 La serie converge per $|x| < R$, non converge per $|x| > R$, per $|x| = R$ boh.

Teorema 2 Se esiste $L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, allora $R = \frac{1}{L}$

Teorema 3 Se la serie è la serie di Taylor di una certa funzione $f(x)$, allora la serie DOVE CONVERGE (all'interno del raggio di convergenza + eventualmente agli estremi) converge a $f(x)$

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-x} \qquad \boxed{\text{Per } |x| < 1}$$

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $(R = +\infty)$

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$= -\log(1-x) \qquad \text{Per } x \in [-1, 1)$$

$R = 1$ per $x = -1$ converge, per $x = 1$ NO

<u>Teorema 4</u> Sia $f(x) = \sum c_n x^n$ (definita per $|x| < R$)

Allora $f(x)$ è derivabile e la sua derivata si calcola derivando termine a termine

$$\boxed{f'(x) = \sum c_n \, n \, x^{n-1}}$$

Il raggio di convergenza della serie delle derivate è lo stesso della serie di partenza

Teorema di scambio: la derivata della serie è la serie delle derivate

<u>Esempio 1</u> $\displaystyle\sum_{n=8}^{\infty} x^n = x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 - x - x^2 - \dots - x^7$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 - x - \dots - x^7$$

<u>2° modo</u>: $x^8 + x^9 + x^{10} + \dots = x^8 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = x^8 \cdot \frac{1}{1-x}$

In generale: $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} x^n = x^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x) \qquad R=1$

NOTA BENE: $f(0)=0$

$$f'(x) \overset{\text{Teo. 4}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1+x+x^2+x^3+\dots$$

$$= \frac{1}{1-x}$$

$\leadsto f'(x) = \frac{1}{1-x} \leadsto$ f si può calcolare facendo la primitiva

$f(x) = -\log(1-x) + C$ ← Devo scegliere C controllando un valore di $f(x)$

↓ Dovendo essere $f(0)=0$, sarà per forza $C=0$.

Esempio 3

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$$

Se pongo $x^2 = y$ ottengo $1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \dfrac{1}{1-y}$

Quindi la somma di quella iniziale è $\dfrac{1}{1-x^2}$

Esempio 4 $\quad 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$

Pongo $y = x^2$ e ottengo $\quad 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \dots$

Pongo $z = -y$ $\quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$

La serie in z ha come somma $\dfrac{1}{1-z}$

$\Rightarrow$ la serie in y ha come somma $\dfrac{1}{1+y}$

$\Rightarrow$ la serie in x ha come somma $\dfrac{1}{1+x^2}$

<u>Esempio 5</u> $\quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = f(x)$

Si verifica (fatto a suo tempo) che $R=1$

$$f'(x) \overset{\text{TEO. 4}}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi $f(x) = \arctan x + c$

Mettendo $x=0$ si calcola che $c=0$.

<u>Esempio 6</u> $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$

$$= x\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots\right)$$

Teo. 4 $\longrightarrow = x\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\right)'$

Uso formula calcolata all'inizio $\longrightarrow = x\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x\,\frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$

VALE PER I VALORI DI x per cui la SERIE CONVERGE ($|x|<1$)

Esempio 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \dots$$

$$= x\left(1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \dots\right)$$

Teo. 4 $\longrightarrow$ $= x\left(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots\right)'$

Esempio precedente $\longrightarrow$ $= x\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]'$

e non resta che fare la derivata...

—o—o—

Esempio 8

$$\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right) - x - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right]$$

Formula per la somma (valida per gli x per cui la serie converge)

Esempio 9

$$\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - 1 - x\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(e^x - 1 - x\right)$$

Se c'erano solo potenze dispari $\rightsquigarrow$ $\sinh x$

"NON Esempio 10"

$$\left(x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25} + \dots\right)' = \quad \text{Teo. 4}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(-\log(1-x)\right)$$

Facendo la primitiva trovo la somma iniziale.

Purtroppo la primitiva non viene in termini di funzioni elementari ...