EQUAZIONI DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE

$$\boxed{u' + a(t)\, u = b(t)}$$

Oss. Tutto quanto abbiamo detto sulle equazioni lineari in generale continua a valere. In particolare se l'eq. è omogenea

$$u' + a(t)\, u = 0$$

la soluzione è del tipo $u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t)}$

in questo caso la base ha un solo elemento

Questa equazione è ANCHE a variabili sep. $u' = -a(t) \cdot u$

quindi la soluz. si sa determinare

Per l'eq. non omog. la soluz. generale sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t)}_{\text{SOL. GEN. OMOG.}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOL. QUALUNQUE EQ. NON OMOG.}}$$

Quindi si potrebbe:

① risolvere l'omogenea vedendola come eq. a variabili separabili

② cercare una sol. qualunque della non omog.

→ per tentativi

→ mediante variazione delle costanti

e concludere usando formula generale.

METODO ALTERNATIVO (FATTORE INTEGRANTE)

$$u' + a(t)\,u = b(t)$$

Considero una primitiva $A(t)$ di $a(t)$ $\quad (A'(t) = a(t))$

Moltiplico a dx e sx per $e^{A(t)}$ ← FATTORE INTEGRANTE

$$u' e^{A(t)} + a(t)\, e^{A(t)}\, u = e^{A(t)}\, b(t)$$

$$\left[u e^{A(t)} \right]' = e^{A(t)}\, b(t)$$

parametro libero

$$\Longrightarrow \quad u e^{A(t)} = \int e^{A(t)}\, b(t)\, dt + c$$

Ricavo u :

$$\boxed{u(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)}\, b(t)\, dt + c\, e^{-A(t)}}$$

Esempio 1

$$u' + \underbrace{\sin t}_{a(t)} \cdot u = \underbrace{\sin t}_{b(t)}$$

$A(t) = -\cos t$ FATTORE INTEGRANTE: $e^{A(t)} = e^{-\cos t}$

Moltiplico per il fattore integrante:

$$u' e^{-\cos t} + \sin t \cdot e^{-\cos t} u = \sin t \cdot e^{-\cos t}$$

$$\left[u e^{-\cos t} \right]' = \sin t \cdot e^{-\cos t}$$

$$u e^{-\cos t} = \int \sin t \cdot e^{-\cos t} \, dt + c = e^{-\cos t} + c$$

Ricavo u (moltiplicando per $e^{\cos t}$)

$$\boxed{u(t) = 1 + c\, e^{+\cos t}}$$

In alternativa avrei potuto risolvere l'eq. omog.

$$u' + \sin t \cdot u = 0 \qquad u' = -u \cdot \sin t$$

① Separare: $\frac{du}{dt} = -u \cdot \sin t \Rightarrow \frac{du}{u} = -\sin t \, dt$

② Integrare: $\int \frac{du}{u} = \int -\sin t \, dt \qquad \log|u| = \cos t + c$

③ Ricavare: $|u(t)| = e^{\cos t + c}$

$$u(t) = \pm e^{\cos t + c} = \underbrace{\pm e^{c}}_{\text{Nuova costante } c} \cdot e^{\cos t} = \boxed{c\, e^{\cos t}}$$

Per la non omogenea si vede a occhio la soluz. $\bar{u}(t) \equiv 1$,
Dalla teo. generale la soluz. della non omog. (generale) sarà

$$u(t) = \underbrace{c\, e^{\cos t}}_{\text{SOL. GEN. OMOG.}} + \underbrace{1}_{\bar{u}(t)}$$

Terza strada: $u' + \sin t \cdot u = \sin t \rightsquigarrow u' = (1-u)\sin t$

$\rightsquigarrow$ immediatamente a variabili separabili.

— o — o —

Esempio 2 $\quad u' + \frac{u}{t} = e^{2t}$

Non è a variabili separabili

$a(t) = \frac{1}{t}$, $b(t) = e^{2t}$

$A(t) = \log t$ ← Suppongo di stare risolvendo per $t > 0$

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{\log t} = t$

Moltiplico a dx e sx per il fattore integrante:

$$t u' + u = t e^{2t}$$

$$[tu]' = t e^{2t}$$

$$t u = \int \underset{G}{t}\, \underset{f}{e^{2t}}\, dt + c = \underset{G}{t}\, \underset{F}{\frac{e^{2t}}{2}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{e^{2t}}{2}}\, dt + c$$

$$= \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} + c$$

Ricavo $u(t)$ dividendo per t

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{4t} e^{2t} + \frac{c}{t}}$$

SOL. GEN.
EQ. NON OMOGENEA

<u>Oss.</u> La soluz. dell'eq. omogenea è $\frac{c}{t}$ (il pezzo con la c)

<u>Oss.</u> Supponiamo di avere una condizione iniziale $u(1) = \alpha$. Questo permette di determinare c.
Cosa possiamo dire dell'int. max. di esistenza, tempo di vita, ...

Questo non dipende dal valore di c !!! (dunque di α).
L'int. max di esistenza è sempre $(0, +\infty)$.

$\boxed{\text{TEOREMA GENERALE}}$ Per un'eq. diff. LINEARE (anche a coeff. non costanti, anche di ordine n, anche non omogenea) la soluzione del pb. di Cauchy esiste sempre finché può, cioè l'intervallo massimale di esistenza della soluzione coincide con l'intervallo max di esistenza dei coeff. (e non dipende dal dato iniziale)

<u>Esempi</u> $\quad u' + \dfrac{u}{t} = e^{3t} \qquad u(1) = 27$

Il coeff. $b(t) = e^{3t}$ non ha mai problemi
" " $a(t) = \dfrac{1}{t}$ ha problemi in $t=0 \Rightarrow$ int. max di esistenza $= (0, +\infty)$

Se i coeff. non hanno problemi, non li ha nemmeno la soluz.

$$u' + \frac{u}{t^2} = \text{cost} \qquad u(-3) = \boxed{2}$$

NON CONTA NULLA

Interv. max. di esistenza: $(-\infty, 0)$

perché il tempo iniziale è $t = -3$

$$u'' + \frac{u}{t^2} = \frac{1}{\log t} \qquad u\left(\tfrac{1}{2}\right) = 8 \qquad u(2) = 8$$

Interv. max. di esistenza: $(0, 1)$ $\qquad$ $(1, +\infty)$

— o — o —

<u>Esempio</u> $\quad u'' + 2u' + u = 0 \qquad u(0) = 1 \qquad u'(0) = 2$

$\rightsquigarrow$ $x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad (x+1)^2 = 0$ $\rightsquigarrow$ radice $x = -1$ di molt. 2

$\rightsquigarrow$ base: $e^{-t}, \; t e^{-t}$

$\rightsquigarrow$ soluz. generale $\boxed{u(t) = a e^{-t} + b t e^{-t}}$

Determino a e b:

$u(0) = 1 \rightsquigarrow \quad a = 1$

$u'(t) = -a e^{-t} + b e^{-t} - b t e^{-t}$

Impongo $u'(0) = 2 \rightsquigarrow \quad -a + b = 2 \rightsquigarrow b = 3$

Sol. pb. di Cauchy

$$\boxed{u(t) = e^{-t} + 3t e^{-t}}$$

Int. max. esistenza : $\mathbb{R}$ (come era prevedibile dal fatto che i coeff. non hanno problemi!)