MATEMATICA I

ORA 95

Titolo nota 14/12/2007

Eq. diff. lineari NON OMOGENEE

Metodi per "indovinare" una sol. dell'eq. non omog.

Se il secondo membro è del tipo $e^{\alpha t}$, provo con

$u(t) = \lambda e^{\alpha t}$ e cerco λ in modo che sia soluzione.

Questo NON funziona solo nei casi in cui $e^{\alpha t}$ è GIÀ sol. dell'eq. omogenea (cioè α radice del pol. caratteristico).
In questi casi il tentativo è $u(t) = \lambda t e^{\alpha t}$.
Funziona ...., e se proprio $u(t) = \lambda t^2 e^{\alpha t}$.

Altri 2 casi: → $f(t)$ = polinomio
→ $f(t)$ = seni e coseni

$$u'' + 3u' - 4u = t^2 + 3$$

① Eq. omogenea: $u'' + 3u' - 4u = 0 \rightsquigarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$\rightarrow (x+4)(x-1) = 0 \rightsquigarrow$ radici: $x = 1$ e $x = -4$

Sol. gen. eq. omogenea: $u(t) = a e^{t} + b e^{-4t}$

② Ricerca di UNA soluzione dell'eq. NON omogenea.

La cerco del tipo $u(t) = at^2 + bt + c$ polinomio dello stesso grado con tutti i termini

$u' = 2at + b$, $u'' = 2a$ Sostituisco

$$2a + 6at + 3b - 4at^2 - 4bt - 4c = t^2+3$$

$$u'' + 3u' - 4u = t^2+3$$

$$\begin{cases} -4a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 6a - 4b = 0 & \text{coeff. } t \\ 2a + 3b - 4c = 3 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = \frac{6}{4}a = \frac{6}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$$

$$4c = 2a + 3b - 3$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{9}{8} - 3$$

$$= \frac{-4 - 9 - 24}{8} = -\frac{37}{8}$$

$$c = -\frac{37}{32} \Leftarrow$$

Soluzione generale dell' eq.
NON omogenea

$$u(t) = \underbrace{ae^{t} + be^{-4t}}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOGENEA}} \underbrace{-\frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{8}t - \frac{37}{32}}_{\text{SOLUZIONE TROVATA DELL' EQ. NON OMOGENEA}}$$

In generale se il secondo membro è un polinomio di grado k si cerca una soluzione che sia un pol. di grado k (sempre con tutti i termini, dunque $k+1$ parametri).

Funziona "sempre" TRANNE quando ci sono dei polinomi tra le soluzione dell'eq. omogenea (tipo $1, t, t^2, \dots$, cosa che accade quando $x=0$ è soluzione dell'eq. polinomiale associata all'omogenea). In quel caso "si aggiungano le t".

<u>Esempio</u> $u^{IV} + u'' = t^3$

① Eq. omogenea: $u^{IV} + u'' = 0 \rightsquigarrow x^4 + x^2 = 0$, $x^2(x^2+1) = 0$

$\rightsquigarrow$ radici: $x = 0$ (MOLT. 2) $\qquad x = \pm i \qquad \alpha \pm i\beta$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$x = 0 \;\rightarrow\; e^{0t}, \; te^{0t}$, cioè $\boxed{1}, \boxed{t}$

$x = \pm i \;\rightarrow\; \boxed{\cos t}, \boxed{\sin t}$

Soluz. gen. eq. omogenea:

$$u(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

② Passo all'eq. NON omogenea. Cerco una sol. del tipo

$$u(t) = (at^3 + bt^2 + ct + d)\, \underbrace{t^2}$$

aggiungo t^2 perché ci sono 2 polinomi nella base

$u = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2$, $\quad u' = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt$

$u'' = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d$, $\quad u''' = 60at^2 + 24bt + 6c$

$u^{IV} = 120at + 24b$. Sostituisco nell'eq.

$$\underbrace{120at + 24b}_{u^{IV}} + \underbrace{20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d}_{u''} = t^3$$

$$u^{IV} + u'' = t^3$$

$20a = 1$ coeff t^3 $a = 1/20$

$12b = 0$ " t^2 $b = 0$

$120a + 6c = 0$ " t $c = -1$

$24b + 2d = 0$ term. noto $d = 0$

Soluzione particolare: $\bar{u}(t) = \frac{1}{20} t^5 - t^3$

Soluz. gen. eq. NON omogenea

$$u(t) = \underbrace{c_1 + c_2 t + c_3 \cos t + c_4 \sin t}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\frac{1}{20} t^5 - t^3}_{\bar{u}(t)}$$

Oss. Se uno prova a cercare la soluz. della NON omog. del tipo

$$\bar{u}(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f$$

non riesce a determinare i coeff e ed f. In realtà sono come i coeff. c_2 e c_1 (quindi liberi)

<u>Esempio</u> $u'' + 3u' - 4u = \sin(2t)$

Omogenea come prima. Per la NON omogenea provo con

$$u(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t) \rightsquigarrow \text{cerco } a \text{ e } b$$

$u' = +2a\cos(2t) - 2b\sin(2t)$

$u'' = -4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)$. Sostituisco nell'equazione

$$\underbrace{-4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)}_{u''} \underbrace{+}_{+} \underbrace{6a\cos(2t) - 6b\sin(2t)}_{3u'} \underbrace{-4a\sin(2t) - 4b\cos(2t)}_{-4u} = \sin(2t)$$

$$\begin{cases} -4a - 6b - 4a = 1 & \text{coeff. di } \sin(2t) \\ -4b + 6a - 4b = 0 & \text{coeff. di } \cos(2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a - 6b = 1 \\ 6a - 8b = 0 \end{cases} \qquad b = \frac{6}{8}a = \frac{3}{4}a$$

$-8a - 6\,\frac{3}{4}a = 1$

$-8a - \frac{9}{2}a = 1 \qquad \frac{-25}{2}a = 1$

$a = -\frac{2}{25}$ $\qquad b = \frac{3}{4}a = -\frac{3}{50}$

Soluzione particolare

$\bar{u}(t) = -\frac{2}{25}\sin(2t) - \frac{3}{50}\cos(2t)$ ← CONTROLLARE !!!

Soluzione generale eq. NON omogenea:

$$u(t) = \underbrace{a e^{t} + b e^{-4t}}_{\text{SOL. OMOG.}} - \frac{2}{25}\sin(2t) - \frac{3}{50}\cos(2t)$$

—o—o—

In generale se il secondo membro è del tipo $c_1\cos(\alpha t) + c_2\sin(\alpha t)$

allora il tentativo da fare è: $\bar{u}(t) = a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)$

(sin e cos vanno sempre usati insieme, anche se al II membro c'è solo uno dei 2)

Questo non funziona se $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$ sono già sol. dell' eq. omog.
In tal caso il tentativo giusto è

$$\bar{u}(t) = t\left(a\cos(\alpha t) + b\sin(\alpha t)\right)$$

↓ e potenze + alte se serve.

— o — o —

Nel caso di secondi membri del tipo

$$p(t)\,e^{\alpha t} \qquad \text{oppure} \qquad p(t)\sin(\alpha t) \qquad (p(t) \text{ polinomio})$$

il tentativo da fare è

$$\bar{u}(t) = q(t)\,e^{\alpha t} \qquad \text{oppure} \qquad \bar{u}(t) = q_1(t)\sin(\alpha t) + q_2(t)\cos(\alpha t)$$

dove i polinomi in gioco $(q(t), q_1(t), q_2(t))$ hanno lo stesso grado di quello al II membro (sempre completi con tutti i termini)

<u>Oss.</u> Se al II membro c'è un po' di tutto?

$$u'' + 3u' - 4u = e^{2t} + e^{3t} + \cos(4t) + t^2$$

ci sono 2 strade:

* o si fa il tentativo che unisce i singoli tentativi:

$$\bar{u}(t) = a e^{2t} + b e^{3t} + c\cos(4t) + d\sin(4t) + e t^2 + f t + g$$

* in alternativa si risolve separatamente considerando un pezzo per volta del II membro, e poi si sommano le soluz. ottenute

(Domanda: perchè si può fare pezzo per pezzo e poi sommare? Si usa che l'eq. è lineare)