MATEMATICA I $\boxed{\text{ORA 94}}$

Titolo nota 13/12/2007

Come determinare una base dell'insieme delle soluz. per un' eq. diff. di ordine n lineare omogenea a coeff. costanti

Analoga al caso $n=2$: Eq. $\rightsquigarrow$ Polinomio di grado n

$\rightsquigarrow$ n radici (se contate con molteplicità)

* λ radice reale di molt. 1 produce $e^{\lambda t}$

* λ radice reale di molt. k produce k elementi della base:

$$e^{\lambda t},\ t e^{\lambda t},\ t^2 e^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{k-1} e^{\lambda t} \quad \leftarrow k \text{ elementi}$$

* $\alpha \pm i\beta$ radici complesse coniugate di molt. 1 $\rightsquigarrow$ 2 el. della base

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

× $\alpha \pm i\beta$ coppia di radici compl. coniugate di molt. k;
produconо $2k$ elementi della base

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

$$t\,e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad t\,e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

— o —

<u>Esempio 1</u> $\quad u^{V} - u''' = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x^5 - x^3 = 0$

$x^3(x^2-1) = 0 \quad \rightsquigarrow$ radici $\quad x = \begin{cases} 0 & \text{MOLT 3} \\ 1 & \\ -1 & \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ MOLT 1

$x = 1 \rightsquigarrow e^{t} \qquad x = 0 \rightsquigarrow e^{0t},\ t e^{0t},\ t^2 e^{0t}$

$x = -1 \rightsquigarrow e^{-t} \qquad$ cioè $\ 1, t, t^2$

Soluz. generale:

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 + c_4 t + c_5 t^2$$

<u>Esempio 2</u> $\quad u^{IV} + 2u'' + u = 0$

$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \qquad (x^2+1)^{\boxed{2}} = 0$

Radici: $x = \pm i$ di molteplicità $\boxed{2}$ $(\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = 0$ e $\beta = 1)$

<u>Base</u>: $\cancel{e^{0t}} \sin t, \quad \cancel{e^{0t}} \cos t, \quad t\, \cancel{e^{0t}} \sin t, \quad t\, \cancel{e^{0t}} \cos t$

Soluz. generale:

$$u(t) = a \sin t + b \cos t + c\, t \sin t + d\, t \cos t$$

EQUAZIONI NON OMOGENEE

$$a_n u^{(n)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t)$$

Teoria generale. La soluzione generale di un' eq. diff. NON OMOGENEA (anche a coeff. non costanti) si scrive nella forma

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{SOLUZIONE GENERALE DELL' EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{SOLUZIONE QUALUNQUE DELL' EQ. NON OMOGENEA}}$$

Operativamente: L'eq. non omogenea ha (ovviamente) infinite soluzioni. Se riesco a trovarne una qualsiasi (in qualunque modo) la formula mi fornisce tutte le altre.

Dim. Sia $\bar{u}$ una soluzione

$$a_n(t)\,\bar{u}^{(n)} + a_{n-1}(t)\,\bar{u}^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,\bar{u}' + a_0\bar{u} = f(t)$$

Sia u un'altra soluzione

$$a_n(t)\,u^{(n)} + a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + \dots + \dots + a_0 u = f(t)$$

Chiamo $z = u - \bar{u}$ e sottraggo le equazioni

$$a_n(t)\underbrace{\left[u^{(n)} - \bar{u}^{(n)}\right]}_{z^{(n)}} + \dots + a_1(t)\underbrace{\left[u' - \bar{u}'\right]}_{z'} + a_0(t)\underbrace{\left[u - \bar{u}\right]}_{z} = 0$$

$\Rightarrow$ z è una soluzione dell'eq. OMOGENEA

$\Rightarrow$ $u = \underbrace{z}_{\text{sol. omog.}} + \underbrace{\bar{u}}_{\text{sol. da cui sono partito.}}$ $\square$

Operativamente: per risolvere un' eq. lineare non omogenea bisogna fare 2 cose

① trovare la soluz. generale dell' eq. OMOGENEA (problema già affrontato)

② trovare una soluzione qualunque (in qualunque modo) dell' eq. non omogenea

Per il punto ② ci sono 2 metodi

→ Provare a INDOVINARE

→ METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI (DI LAGRANGE)

(Funziona "sempre" a patto di saper fare delle primitive)

COME INDOVINARE LA SOLUZIONE ?

<u>Esempio 1</u> Risolvere $u'' - 5u' + 6u = e^t$

① Risolvo l'eq. OMOGENEA $u'' - 5u' + 6u = 0$

$\rightsquigarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (x-2)(x-3) = 0$

$\rightsquigarrow$ radici $x = 2,\ x = 3 \rightsquigarrow$ base: e^{2t}, e^{3t}

② Cerco di indovinare una sol. dell'eq. NON omogenea.

Cerco la soluzione del tipo $u(t) = \lambda e^t$.

Calcolo $u'(t) = \lambda e^t$, $u''(t) = \lambda e^t$. Sostituisco nell'eq.

$$\underbrace{\lambda e^t}_{u''} - \underbrace{5\lambda e^t}_{5u'} + \underbrace{6\lambda e^t}_{6u} = \underbrace{e^t}_{e^t} \qquad 2\lambda e^t = e^t \quad \to \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Quindi $u(t) = \frac{1}{2} e^t$ è sol. della NON OMOG.

$\Rightarrow$ Soluz. gen. eq. NON OMOG:

$$u(t) = \underbrace{a e^{2t} + b e^{3t}}_{\text{SOL. GEN. EQ. OMOGENEA}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^t}_{}$$

SOL. INDOVINATA

<u>Esempio 2</u> $\quad u'' - 5u' + 6u = e^{-2t}$

Omogenea come sopra

Cerco una soluz. dell' eq. non omog. del tipo $u(t) = \lambda e^{-2t}$

Calcolo $u'(t) = -2\lambda e^{-2t}$, $u''(t) = 4\lambda e^{-2t}$ e sostituisco

$$\underbrace{4\lambda e^{-2t}}_{u''} + \underbrace{10\lambda e^{-2t}}_{-5u'} + \underbrace{6\lambda e^{-2t}}_{+6u} = \underbrace{e^{-2t}}_{= e^{-2t}} \qquad 20\lambda e^{-2t} = e^{-2t} \rightarrow \lambda = \frac{1}{20}$$

Sol. generale NON OMOGENEA:

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{3t} + \frac{1}{20} e^{-2t}$$

<u>Esempio 3</u> $\quad u'' - 5u' + 6u = e^{3t}$

Cerco una sol. dell' eq. non omog. del tipo $u(t) = \lambda e^{3t}$

Calcolo $u'(t) = 3\lambda e^{3t}$, $u''(t) = 9\lambda e^{3t}$ e sostituisco:

$$\underbrace{9\lambda e^{3t}}_{u''} \underbrace{- 15\lambda e^{3t}}_{-5u'} \underbrace{+ 6\lambda e^{3t}}_{+6u} \underbrace{= e^{3t}}_{= e^{3t}} \quad \rightsquigarrow \quad 0 = e^{3t}$$

NOTA BENE: e^{3t} è sol. dell' eq. omogenea, quindi è ovvio che sostituito a sx dia 0!!!

Cosa si prova? $u(t) = \lambda t e^{3t}$

$u'(t) = \lambda e^{3t} + 3\lambda t e^{3t}$, $u''(t) = 3\lambda e^{3t} + 3\lambda e^{3t} + 9\lambda t e^{3t}$

Sostituisco

DEVE SUCCEDERE!!!

$$\underbrace{6\lambda e^{3t} + \cancel{9\lambda t e^{3t}}}_{u''} \underbrace{- 5\lambda e^{3t} - \cancel{15\lambda t e^{3t}}}_{-5u'} \underbrace{+ \cancel{6\lambda t e^{3t}}}_{+6u} = e^{3t}$$

$$= e^{3t}$$

Resta $\lambda e^{3t} = e^{3t} \rightsquigarrow \lambda = 1$

Conclusione: sol. gen. eq. NON OMOGENEA:

$$u(t) = ae^{3t} + be^{2t} + \boxed{te^{3t}}$$

SOL. PARTICOLARE