MATEMATICA I

ORA 30 (-10 !!)

Titolo nota 12/12/2007

EQUAZIONI DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$$\boxed{u' = f(u)\,g(t)}$$

1. Separare
2. Integrare
3. Ricavare

Determinare soluz. generale dell'eq. diff. dipendente da un parametro c

4. Determinare c
5. Controllare
6. Studiare la soluzione

Se abbiamo un problema di Cauchy (cioè una condizione iniziale

$$\boxed{u(t_0) = u_0}$$

t_0, u_0 dati

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 \cdot e^t \\ u(0) = 1 \end{cases}$ ← eq. diff. variabili sep.
← cond. iniz.

① **Separare** $u' = u^2 \cdot e^t$ $\quad \dfrac{du}{dt} = u^2 \cdot e^t$

Tutte le u a sx, tutte le t a dx !!

$$\boxed{\frac{du}{u^2} = e^t\,dt}$$

② **Integrare** (a sx rispetto a u, a dx rispetto a t)

$$\int \frac{du}{u^2} = \int e^t\,dt \qquad -\frac{1}{u} = e^t + c$$

← parametro libero che ci si aspetta

che sia $+c$ o $-c$ non cambia

③ **Ricavare** (u in funzione di t) $\quad \dfrac{1}{u} = -e^t + c$

$$u = \frac{1}{c - e^t}.$$

$\Rightarrow$ La soluz. generale dell' eq. differenziale è

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{c - e^t}}$$

Ora entra in gioco la condizione iniziale $u(0) = 1$

4 <u>Determinare c</u> (sfruttando la condiz. iniziale)

$u(0) = 1$

$$u(0) = \frac{1}{c - e^0} = \frac{1}{c-1} = 1$$

sostituisco nella soluz. generale

$\rightarrow c - 1 = 1 \rightarrow \boxed{c = 2}$

$\Rightarrow$ La soluzione del problema di Cauchy è

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2 - e^t}}$$

5 Controllare (Caldamente consigliata!!)

$\boxed{5.1}$ Controllo la condiz. iniziale: $u(0) = \frac{1}{2-e^0} = \frac{1}{2-1} = 1$ Ok!

$\boxed{5.2}$ Controllo eq. diff.

$$u'(t) = -\frac{-e^t}{(2-e^t)^2} = \frac{e^t}{(2-e^t)^2} = e^t \cdot [u(t)]^2$$ Ok!

6 Studiare la soluzione ottenuta

→ INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA

→ TEMPO DI VITA

→ DESTINO DELLA SOLUZIONE
- ↗ ESISTENZA GLOBALE
- → BLOW-UP
- ↘ BREAK-DOWN

NEL PASSATO E NEL $\boxed{\text{FUTURO}}$

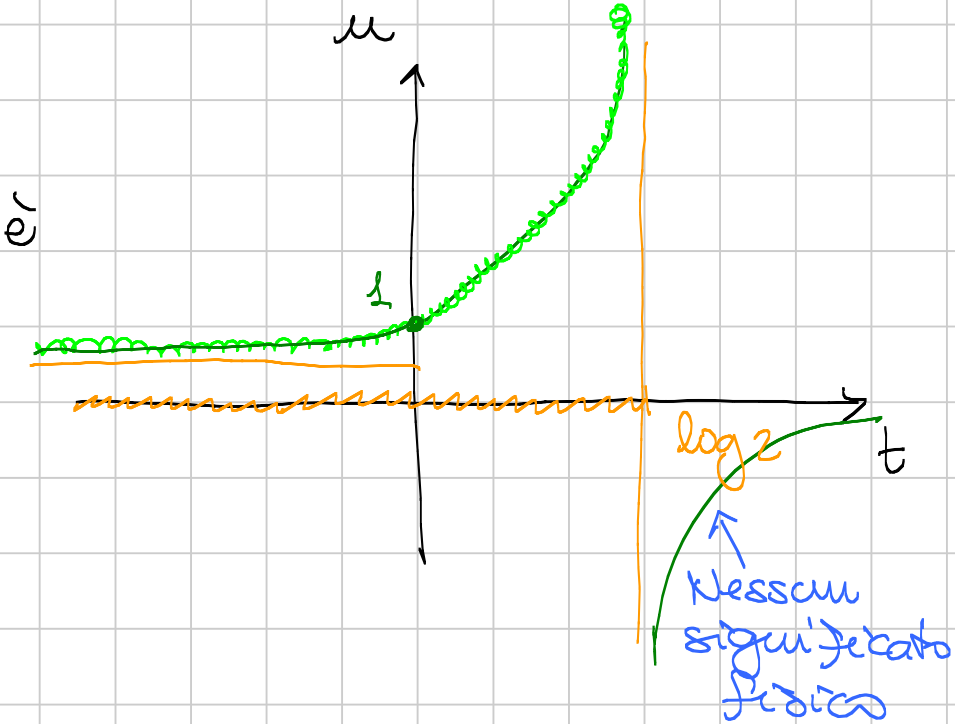
INTERVALLO MAX DI ESISTENZA: pezzo dell'insieme di definizione della soluzione che contiene il tempo iniziale

Nell' esempio: $u(t) = \frac{1}{2-e^t}$. $u(t)$ è definita quando $2-e^t \neq 0$, cioè $e^t \neq 2$, cioè $t \neq \log 2$

Tempo iniziale: $t=0$

$\Rightarrow$ interv. massimale di esistenza è

$(-\infty, \log 2)$



TEMPO DI VITA (LIFE SPAN)

È il sup dell' int. max. di esistenza. Nell' esempio $T = \log 2$

Si ha <u>esistenza globale</u> (nel futuro) se $T = +\infty$

Se $T < +\infty$ (come nell'esempio) si dice che la soluzione "muore al tempo T". In questo caso si ha <u>BLOW-UP</u> (esplosione) se

$$\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$$

Nell'esempio si ha che $\lim_{t \to \log 2^-} \frac{1}{2-e^t} = +\infty \Rightarrow$ blow-up

Si ha <u>BREAK-DOWN</u> (rottura) se <u>non c'è blow-up</u> ma

$$\lim_{t \to T^-} u'(t) = \pm\infty$$ (esplosione della derivata)

Esempio 2 $\begin{cases} u' = -\frac{1}{7u} \\ u(0) = 2 \end{cases}$ ← anche se manca la t è a variabili separabili

① Separare $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{7u}$ $\quad u\,du = -\frac{1}{7}\,dt$

② Integrare $\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{7}t + c$

③ Ricavare $u^2 = -\frac{2}{7}t + c \rightsquigarrow \boxed{u = \pm\sqrt{-\frac{2}{7}t + c}}$

↑ Non si ricava in modo unico

④ Determinare c $\quad u(0) = 2$

Scelgo la sol. generale con $+\sqrt{\ }$ perchè altrimenti $u(0)$ non può essere > 0

$u(t) = \sqrt{c - \frac{2}{7}t}$ $\qquad$ $u(0) = 2$

$\sqrt{c} = 2 \longrightarrow c = 4$

Soluzione del problema di Cauchy:

$$\boxed{u(t) = \sqrt{4 - \frac{2}{7}t}}$$

⑤ <u>Controllare</u> (lasciato per esercizio!)

⑥ <u>Studiare</u> $u(t)$ definita quando $4 - \frac{2}{7}t \geq 0$, cioè

$\frac{2}{7}t \leq 4$, cioè $t \leq 14$

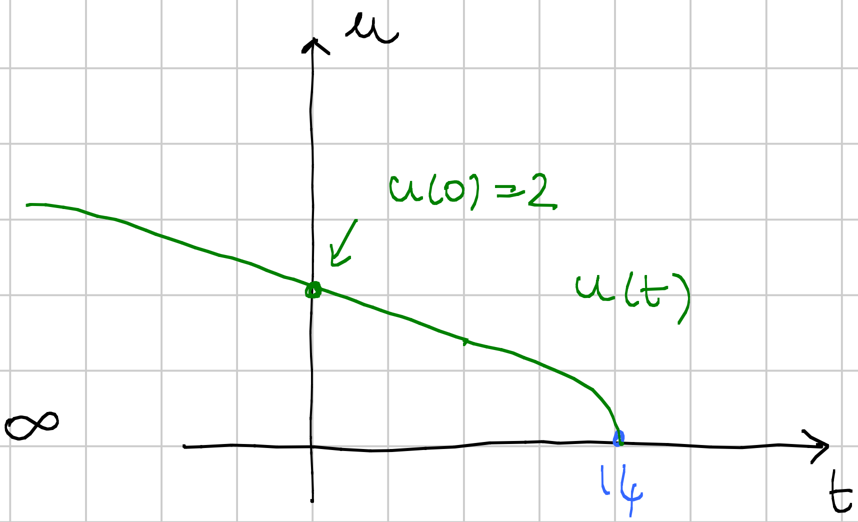
Intervallo max di esistenza: $(-\infty, 14]$

Tempo di vita: $T = 14$

$$\lim_{t\to 14^-} u(t) = \lim_{t\to 14^-} \sqrt{4-\frac{2}{7}t} = 0$$

Non c'è blow-up.

$$\lim_{t\to 14^-} u'(t) = \lim_{t\to 14^-} \frac{-\frac{2}{7}}{2\sqrt{4-\frac{2}{7}t}} = -\infty$$



$\Rightarrow$ BREAK-DOWN

— o —

<u>Esempio 3</u> Se fosse stato $\begin{cases} u' = -\frac{1}{7u} \\ u(0) = -3 \end{cases}$

①, ②, ③ Come prima. Nella fase ④ uso soluz. generale con segno −

$$u(t) = -\sqrt{c-\frac{2}{7}t} \qquad u(0) = -3 \qquad -\sqrt{c-\frac{2}{7}0} = -3$$

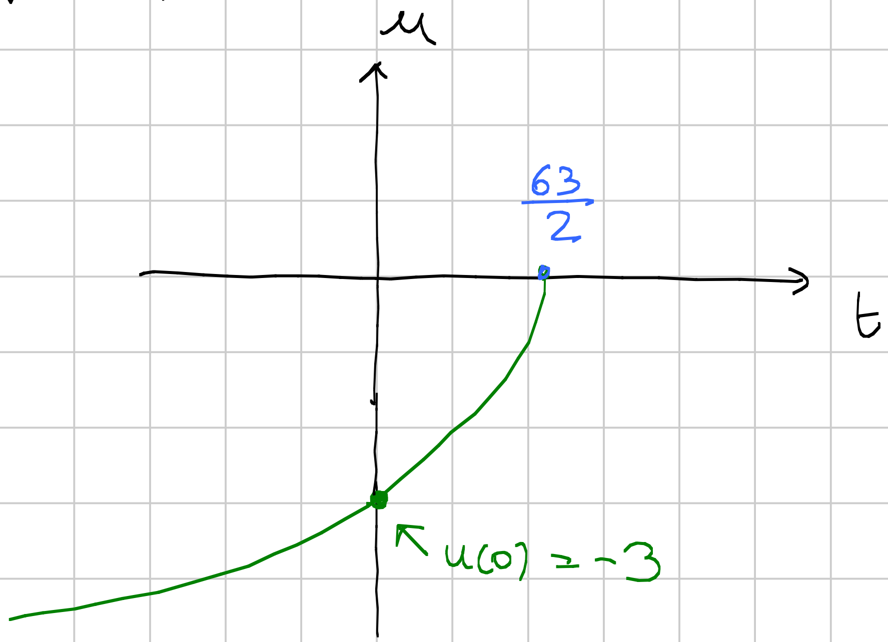
$\Rightarrow \quad c = 9$

segno $-$

$\Rightarrow$ Sol. generale $\qquad u(t) = \boxed{-}\sqrt{9 - \frac{2}{7}t}$

La soluzione ha BREAK-DOWN

per $T = \frac{63}{2}$



$9 - \frac{2}{7}T = 0$

$\frac{2}{7}T = 9 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{63}{2}$