MATEMATICA I

ORA 88

Titolo nota 07/12/2007

Osservazione sulla lunghezza di una curva

Se la curva è un tratto di grafico $\gamma(t) = (\underset{x(t)}{t}, \underset{y(t)}{f(t)})$ $t \in [a,b]$

$\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = \dot{f}(t)$, quindi

$$\boxed{\text{lunghezza} = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2}\, dt}$$

INTEGRALI CURVILINEI

Notazioni

Ingredienti: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$ CURVA

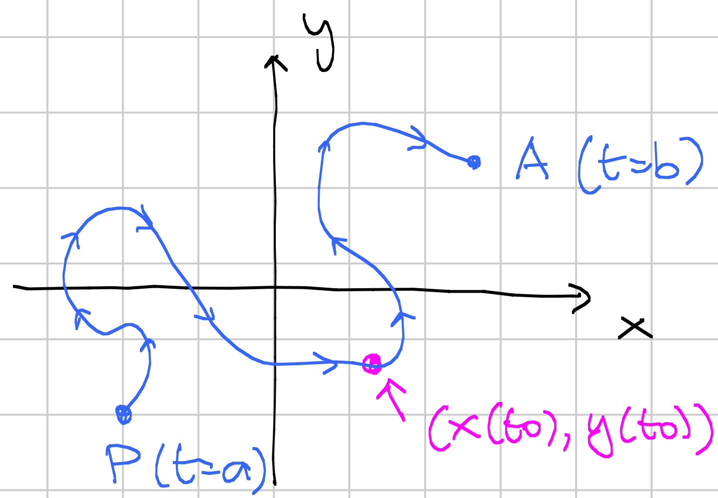
$f(x,y)$ = funzione di 2 variabili definita almeno dove passa la curva

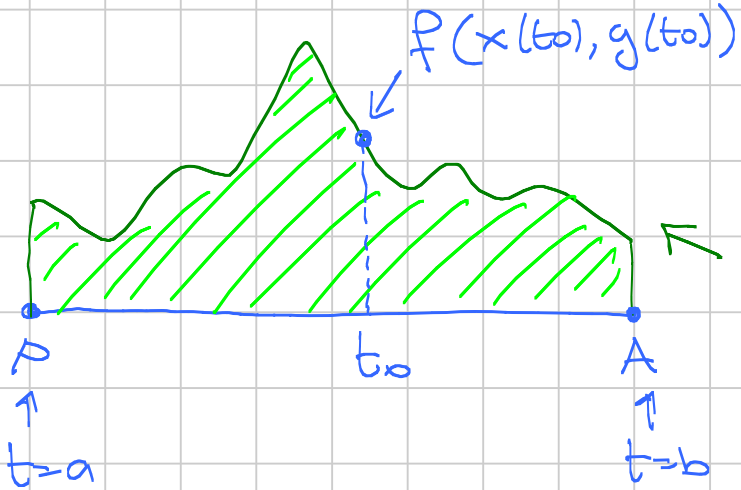
$$\int_{\boxed{\gamma}} f(x,y)\, ds$$

integrale sulla curva

<u>Significato geometrico</u> Curva = percorso della tappa

$f(x,y)$ = altezza sul livello del mare del p.to (x,y)





altezza a cui si viene a trovare chi percorre la curva γ

$\int_\gamma f(x,y)\,ds =$ area sotto il grafico. (con segno)

↓ Supponendo la CURVA PERCORSA a SPEED costante

Formula per il calcolo

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,dt}$$

N.B. Se la funzione è costante, viene un multiplo della lunghezza della curva

BARICENTRO DI UNA CURVA

Data una curva γ, il suo baricentro è il p.to $G = (x_G, y_G)$ dove

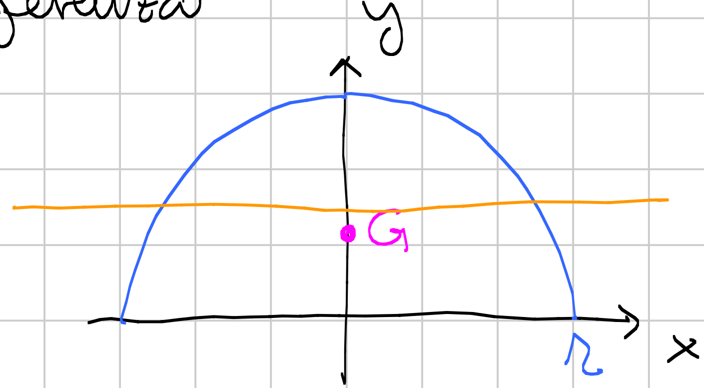
$$x_G = \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_\gamma x \, ds \quad , \quad y_G = \frac{1}{\text{lungh}} \int_\gamma y \, ds$$

<u>Esempio</u> Baricentro di una semicirconferenza

$$\text{lungh} = \pi r \qquad x_G = 0$$

$$\int_\gamma y \, ds = \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$$

$$= \int_0^\pi r \sin t \sqrt{\underbrace{r^2 \sin^2 t}_{= \dot{x}^2} + \underbrace{r^2 \cos^2 t}_{= \dot{y}^2}} \, dt$$



Parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\underbrace{r \cos t}_{x(t)}, \underbrace{r \sin t}_{y(t)}) \qquad t \in [0, \pi]$$

$$= \int_0^{\pi} r^2 \sin t \, dt = 2r^2$$

$$y_G = \frac{1}{\text{lungh}} \int_\gamma y \, ds = \frac{1}{\pi r} \cdot 2r^2 = \boxed{\frac{2}{\pi} r}$$

SOPRA LA METÀ

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

— o — o —

AREA DI UNA SUPERFICIE?

Come si definisce? Non ve lo dico!!!

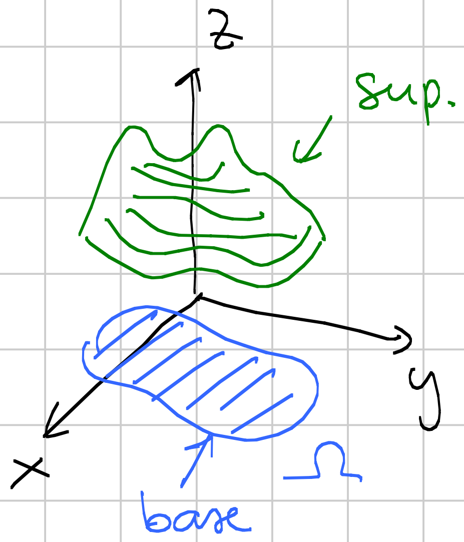
Come si calcola? Primo caso: la superficie è il grafico di una funzione di 2 variabili

$$z = f(x, y)$$

In questo caso

$$\text{Area}(\text{Sup}) = \iint_{\Omega} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\; dx\,dy$$

base



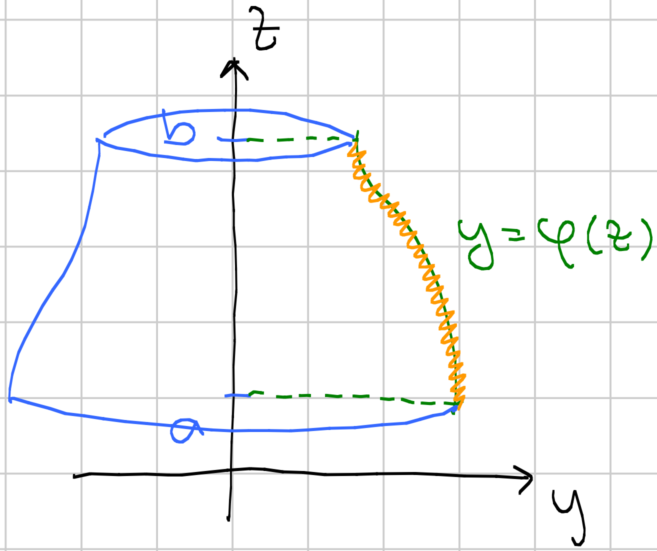
<u>Secondo caso</u> : superficie di ROTAZIONE

$\boxed{\text{Guldino 1:}}$

$$\text{Volume}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

Figura che ruota

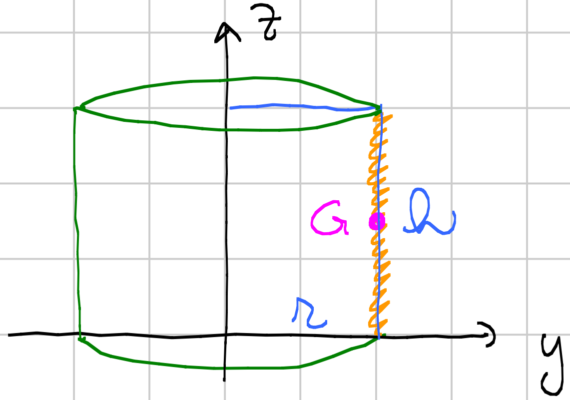
coord y baricentro di F



GULDINO 2

Sup. laterale (S) = lunghezza (curva) $\cdot$ $2\pi\, y_G$

coord y del baricentro della CURVA che ruotando descrive la superficie.



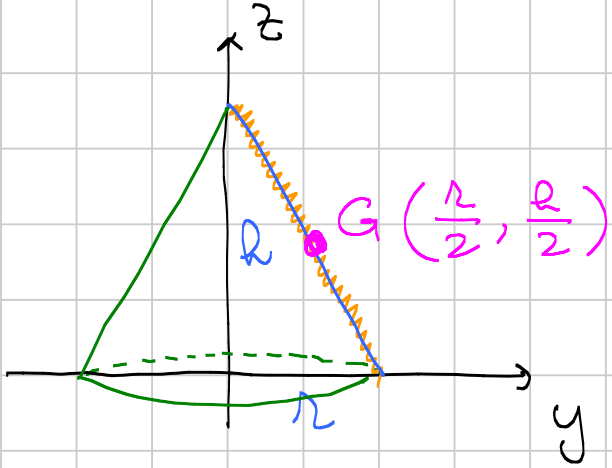
Esempio 1 Cilindro

Sup. lat. cilindro =

lunghezza $\cdot$ $2\pi\, y_G$ =

$= h \cdot 2\pi r = \boxed{2\pi r h}$

Esempio 2   Cono

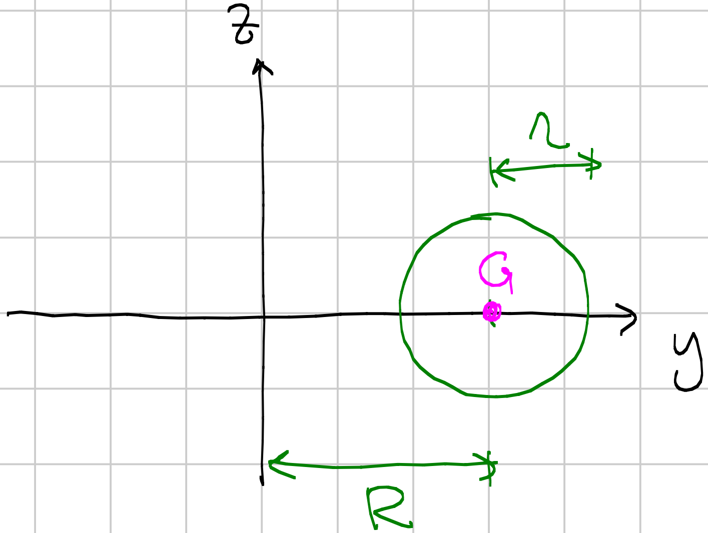


Sup. laterale cono =

$$\text{lungh.} \cdot 2\pi\, y_G = \underbrace{\sqrt{R^2+r^2}}_{\text{apotema}} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\frac{r}{2}}_{y_G}$$

$$= \pi r \sqrt{R^2+r^2}$$

Esempio 3   Toro



$$\text{Area Sup (Toro)} = \text{lungh.} \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R$$

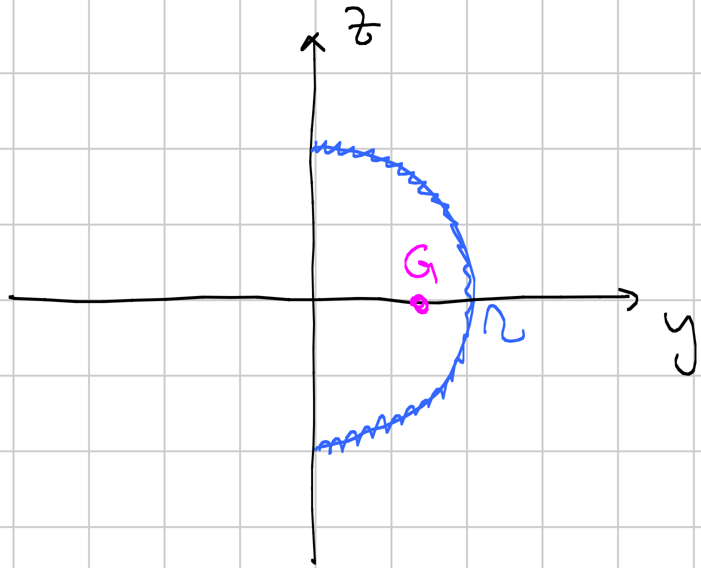
$$= 4\pi^2 r R$$

Esempio 4 Sfera

$$Sup(Sfera) = lungh \cdot 2\pi y_G$$

$$= \cancel{\pi} r \cdot 2\pi \frac{2}{\cancel{\pi}} r$$

$$= \boxed{4\pi r^2}$$



Dal calcolo precedente:

$$y_G = \frac{2}{\pi} r$$

Esempio 5

Area Sup = somma aree delle 2 sup.