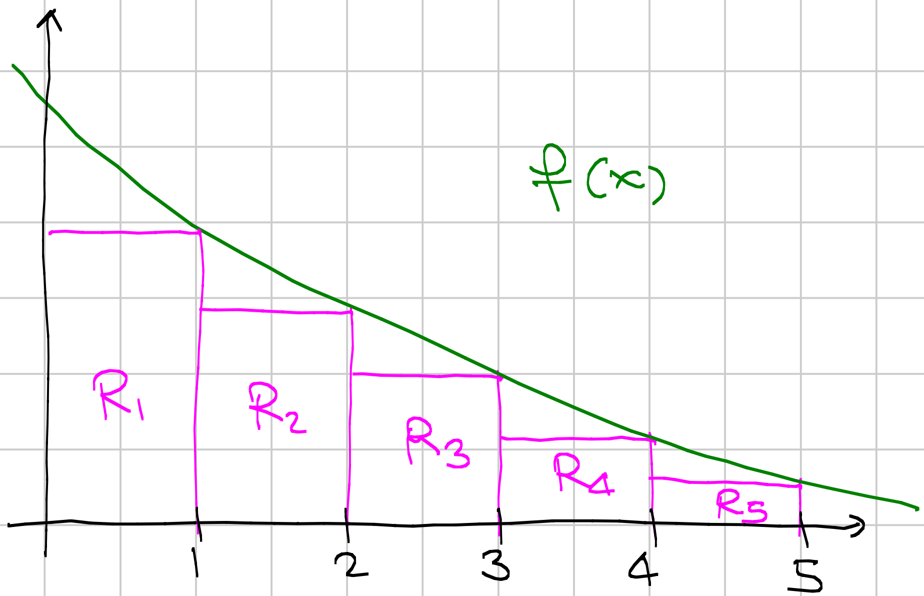
CONFRONTI SERIE - INTEGRALI

PARTE 1: GLI INTEGRALI AIUTANO LE SERIE

$f(x)$ positiva e decrescente



$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \text{area sotto grafico di } f(x)$$

$\geq$ somma aree dei rettangoli

$$\text{Area }(R_k) = \text{base} \cdot \text{altezza} = 1 \cdot f(k)$$

$$\text{Somma aree rettangoli} = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Conclusione

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Più in generale, dato un intero $M \geq 0$,

$$\boxed{\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{k=M+1}^{\infty} f(k)}$$

Applicazione Prendo $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $M = 1$

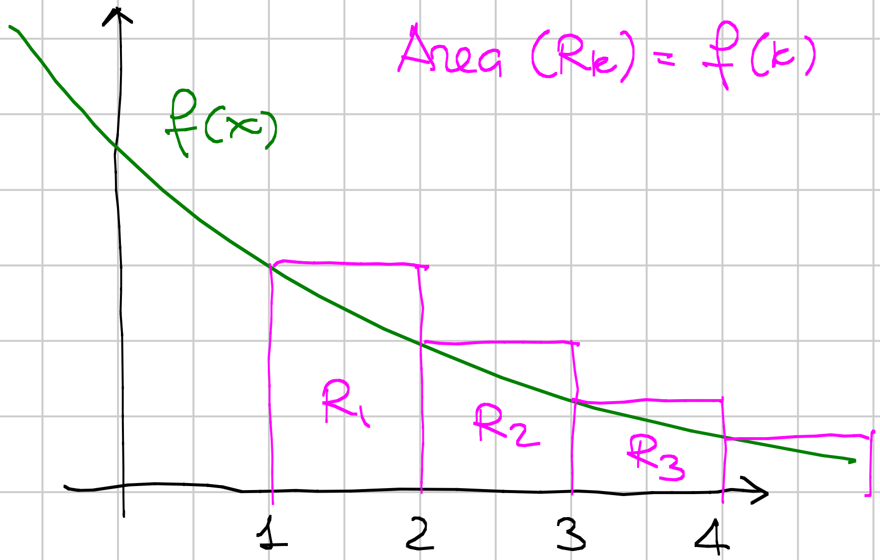
(stessa cosa vale con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ per $\alpha > 1$)

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx} \geq \boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$$

CONVERGE PERCHÈ LO ABBIAMO STUDIATO CON LA DEF.

DUNQUE LA SERIE CONVERGE

$f(x)$ positiva e decrescente



$\int_1^{+\infty} f(x) \leq$ somma aree rettangoli

$= \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)}$$

Analogamente: $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=M}^{\infty} f(k)$

<u>Applicazione</u> $M=1$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx} \le \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

DIVERGE (studiato con definizione)

DIVERGE

Stesso discorso con $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ per $\alpha \le 1$

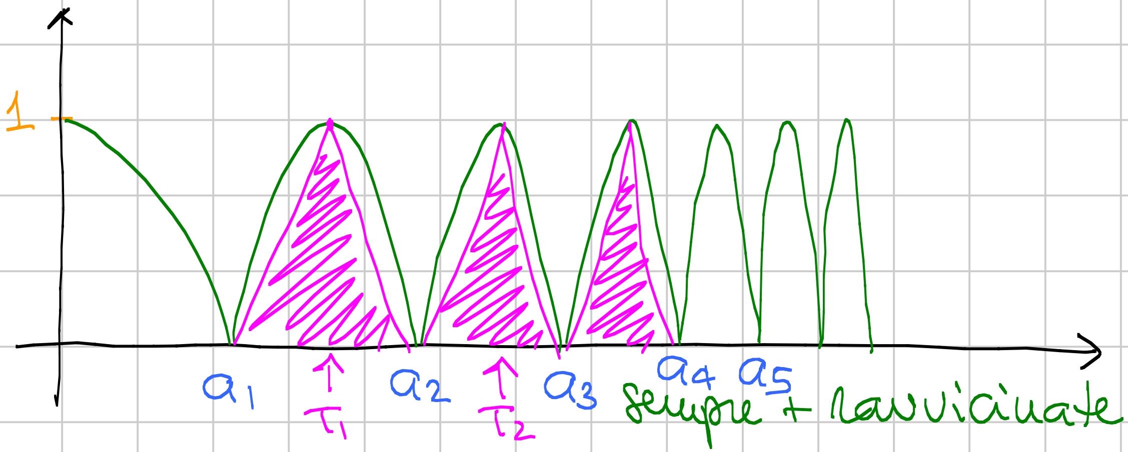
<u>N.B.</u> Il fatto che f sia decrescente serve per confrontare il sottografico di $f(x)$ con i rettangoli

—o—

$\boxed{\text{2ª PARTE}}$ <u>Le serie aiutano gli integrali</u>.

METODO DEI TRIANGOLINI

$$\int_0^{+\infty} |\cos x^2|\,dx$$



$$\int_0^{+\infty} |\cos x^2|\, dx \geq \text{Somma aree dei triangoli}$$

Area triangolo $T_k = \frac{1}{2}$ base $\cdot$ $\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\text{altezza}}$ $= \frac{1}{2}(a_{k+1} - a_k)$

Occorre trovare a_k. Risolvo $\cos x^2 = 0$ $\quad x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$a_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

Somma aree triangoli $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) =$

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right)$$

Come si comporta questa serie?

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

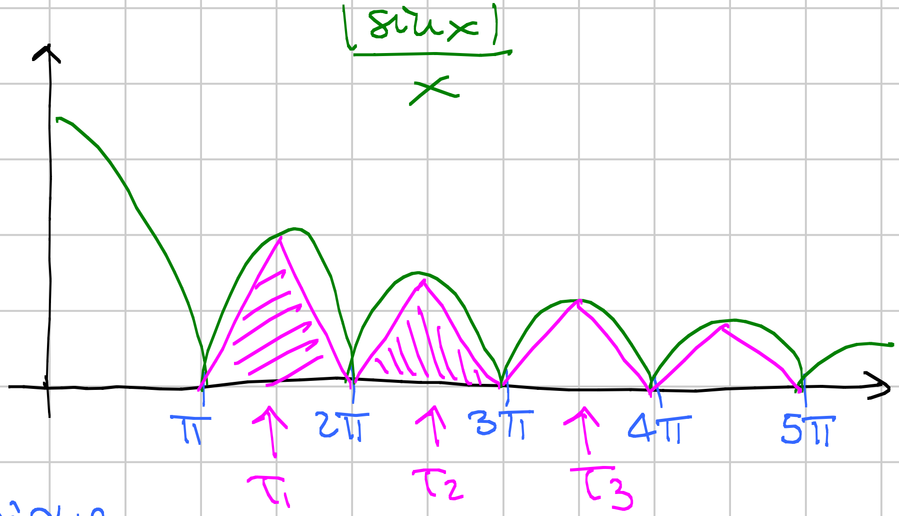
$$\sqrt{\cdots} - \sqrt{\cdots} = \frac{\cancel{\frac{\pi}{2}} + (\cancel{k}+1)\pi - \cancel{\frac{\pi}{2}} \cancel{-k\pi}}{\sqrt{\cdots} + \sqrt{\cdots}} = \frac{\pi}{\sqrt{\cdots} + \sqrt{\cdots}}$$

$$\sim \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

$\Rightarrow$ la serie diverge $\Rightarrow$ l'integrale diverge.

— o — o —

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$



Area $(T_k) = \frac{1}{2}$ base $\cdot$ altezza

$= \frac{1}{2}\pi$ valore della funzione nel p.to medio della base

Base di T_k : $[k\pi, k\pi+\pi]$ P.to medio: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\text{Altezza} = f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left|\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Area}(T_k) = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{k + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2k+1}{2}} = \frac{1}{2k+1}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} \text{Area}(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}$$

La serie diverge $\Rightarrow$ l'integrale diverge

<u>Nota bene</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge, MA

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{converge}$$

Esempio

$$\int_3^{+\infty} \cos x^2 \, dx = \lim_{A \to +\infty} \int_3^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_{G} \underbrace{2x \cos x^2}_{f} dx$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{2x}}_{G} \underbrace{\sin x^2}_{F} \right]_{x=3}^{x=A} - \int_3^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}_{g} \underbrace{\sin x^2}_{F} dx \right\}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left\{ \underbrace{\boxed{\frac{\sin A^2}{2A}}}_{\to 0} - \frac{\sin 9}{6} + \frac{1}{2} \int_3^A \frac{\sin x^2}{x^2} dx \right\}$$

$$= -\frac{\sin 9}{6} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_3^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^2} dx}_{\text{converge per i soliti motivi}} = \text{converge}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 \, dx \text{ converge}, \quad \text{MA} \quad \int_0^{+\infty} |\cos x^2| \, dx \text{ diverge}$$

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ Non c'è l'equivalente della condiz. nec. per gli integrali impropri

$\cos x^2$ non tende a zero per $x \to +\infty$, ma l'integrale converge.

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Andrebbe dimostrato che i triangoli stanno sotto

Nell'esempio $\frac{|\sin x|}{x}$, il max non è MAI nel centro

(Basta vedere che nel centro la derivata non è $= 0$)

$\sin(\text{centro} + \delta) = \sin(\text{centro} - \delta)$

e il denom. è + grande a dx