MATEMATICA I

ORA 84

Titolo nota 05/12/2007

→ Cambi di variabile in generale
→ Solidi di rotazione
→ Guldino 1

Cambi di variabile in generale

Esempio S = sfera con centro in $(3,4,-5)$ e raggio 2

$$\iiint_S x^2 \, dx\,dy\,dz$$

S = punti (x,y,z) la cui distanza da $(3,4,-5)$ è ≤ 2

$$\underbrace{(x-3)}_{=u}{}^2 + \underbrace{(y-4)}_{=v}{}^2 + \underbrace{(z+5)}_{=w}{}^2 \leq 4$$

raggio al quadrato

Nelle variabili u, v, w l'insieme di integrazione diventa
$u^2+v^2+w^2 \le 4$

$$\iiint_S x^2 \, dx\, dy\, dz = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 4} \underbrace{(u+3)^2}_{x^2} \underbrace{J(u,v,w)}_{1} du\, dv\, dw$$

Come si calcola J? Come in 2 variabili:

1. Ricavare: $x = u+3$, $y = v+4$, $z = w-5$

2. Matrice: $\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $J(u,v,w) = |\text{Det}| = 1$

Integrale dato:

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 4} \overset{u^2+6u+9}{\overset{\shortparallel}{(u+3)^2}}\, du\, dv\, dw =$$

$$= \iiint_{\cdots} u^2 + 6 \underbrace{\iiint_{\cdots} u}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ per simmetria}}} + 9 \iiint_{\cdots} 1$$

9 Volume sfera

$= 9\, \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3$ ↖ raggio

Resta da calcolare

$$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 4} u^2\, du\, dv\, dw$$

Questo è uguale a $\iiint v^2$ e $\iiint w^2$

$$= \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} d\varphi}_{\text{sfera in coord. sferiche}} \quad \underbrace{\rho^2 \sin^2\varphi}_{\text{ho scelto la + semplice}} \quad \overbrace{\rho^2 \cos\varphi}^{J} = \text{si finisce}$$

Secondo esempio di cambio di coordinate

$$2x^2+3y^2+5z^2 \le 7 \qquad (\underbrace{\sqrt{2}x}_{u})^2+(\underbrace{\sqrt{3}y}_{v})^2+(\underbrace{\sqrt{5}z}_{w})^2 \le 7$$

① Ricavare: $x=\frac{u}{\sqrt{2}}$ $\quad y=\frac{v}{\sqrt{3}}$ $\quad z=\frac{w}{\sqrt{5}}$

② Matrice: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ③ $|\mathrm{Det}| = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$

come in 2 variabili

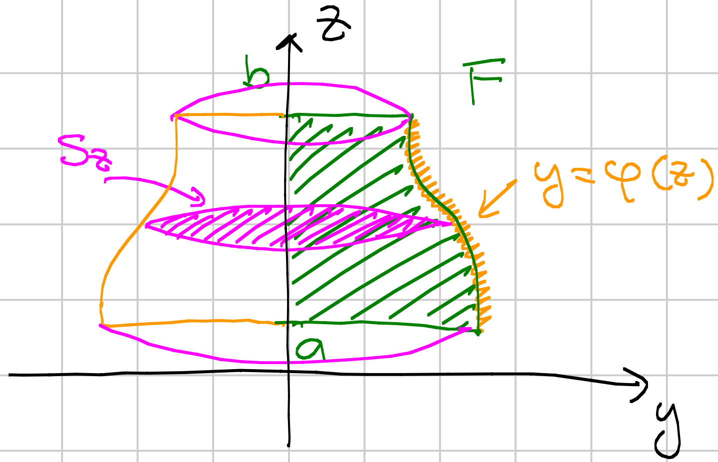
—o—o—

<u>Esercizio</u> Calcolare il J in coordinate sferiche a partire da

$$x=\rho\cos\varphi\cos\theta$$
$$y=\rho\cos\varphi\sin\theta$$
$$z=\rho\sin\varphi$$

$$J(\rho,\theta,\varphi)=\left|\mathrm{Det}\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}\right|$$

SOLIDI DI ROTAZIONE



F = figura nel piano y, z

Ruotando F intorno all'asse z
ottengo un solido di rotazione ("vaso")

F è un insieme NORMALE rispetto all'asse z

$$F = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a,b], \quad 0 \le y \le \varphi(z)\}$$

Sia S il solido.

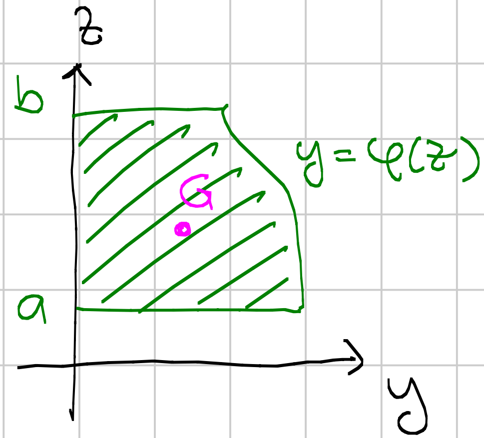
$$\text{Volume}(S) = \iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz \overset{\text{PER SEZIONI}}{=} \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \text{Area}(S_z)\, dz = \pi \int_a^b \underbrace{[\varphi(z)]^2}_{R_z^2} dz$$

S_z = cerchio di raggio $\varphi(z) = R_z$

$$\boxed{1^o \text{ modo di scrivere il volume}}$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}(S) = \pi \int_a^b [\varphi(z)]^2 dz}$$



Calcolo il baricentro di F, in particolare la coordinata y:

$$y_G = \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \iint_F y \, dy\, dz$$ ← F normale asse z

$$= \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy = \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \cdot \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z)\, dz$$

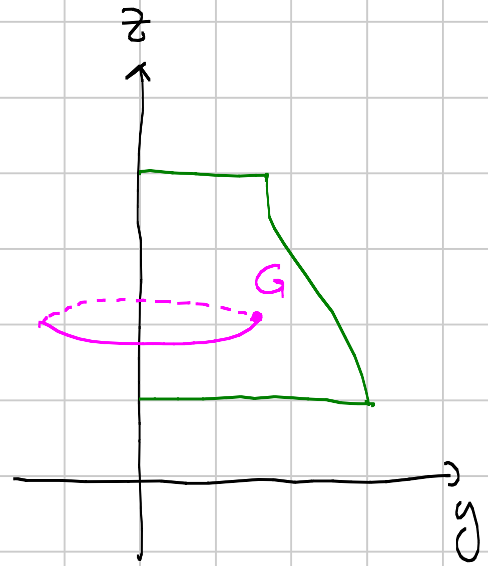
TEOREMA GULDINO 1

$$\boxed{\text{Volume}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi\, y_G}$$

Volume solido di rotazione

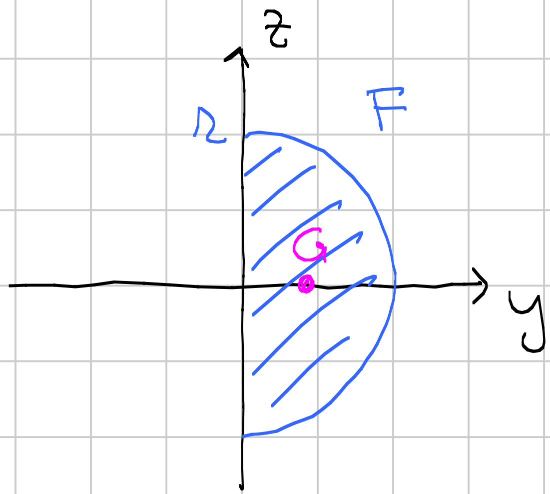
Area figura che ruota

percorso che fa G ruotando



Quando F ruota, il baricentro G descrive una circonferenza lunga $2\pi y_G$

<u>Esempio 1</u> Volume sfera



$$\text{Area}(F) = \frac{\pi}{2} r^2 \qquad y_G = \frac{4}{3\pi} r$$

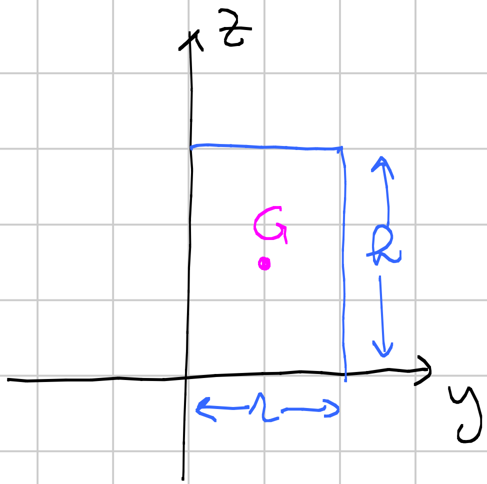
$$\text{Volume} = \text{Area}(F) \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= \frac{\pi}{\cancel{2}} r^2 \cdot \cancel{2\pi} \frac{4}{3\cancel{\pi}} r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esempio 2 Cilindro

$$\text{Volume} = \text{Area} \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= rR \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2 R$$



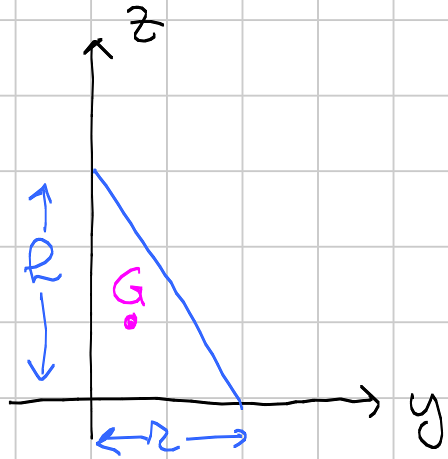
Esempio 3 Cono

$$\text{Area} = \frac{1}{2} rR$$

$$G = \left(\frac{r}{3}, \frac{R}{3}\right)$$

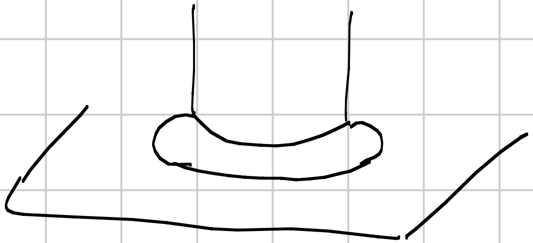
y_G

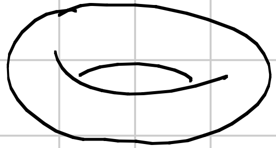
(Verificare con l'integrale)

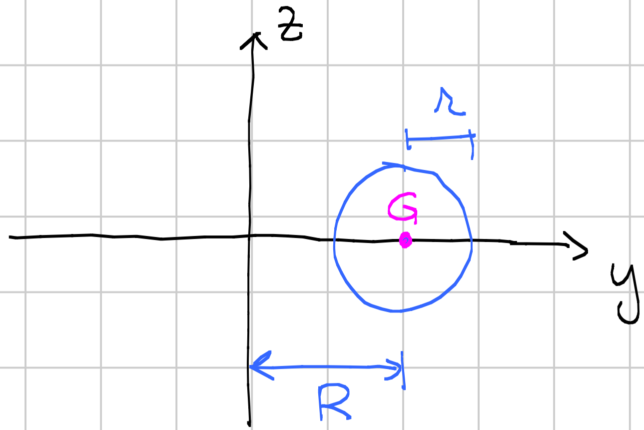


$$\text{Volume} = \text{Area} \cdot 2\pi\, y_G = \frac{1}{2} rR \cdot \frac{r}{3} \cdot 2\pi = \frac{1}{3} \pi r^2 R$$

Esempio 4 TORO





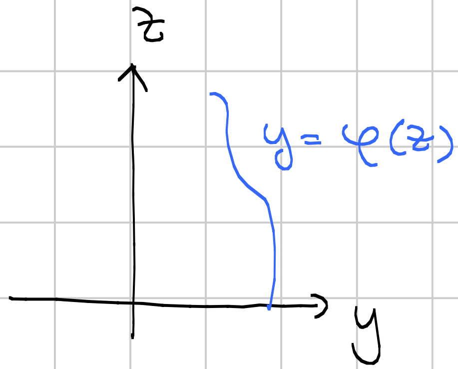


$$\text{Volume (Toro)} = \text{Area} \cdot 2\pi y_G = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

— o — o —

Equazione del solido di rotazione.

La figura che ruota è $y = \varphi(z)$



"Ad altezza z il solido sono tutti i punti che stanno su un cerchio di raggio $\varphi(z)$"

$$x^2+y^2 \underset{\text{superficie}}{=} [\varphi(z)]^2 \qquad x^2+y^2 \underset{\text{interno}}{\le} \varphi^2(z)$$

quando x e y compaiono come x^2+y^2 è un solido di rotazione.