MATEMATICA I

ORA 82

Titolo nota 05/12/2007

Cambi di variabile negli integrali TRIPLI

① COORDINATE CILINDRICHE
② COORDINATE SFERICHE
③ CAMBI COORDINATE IN GENERALE

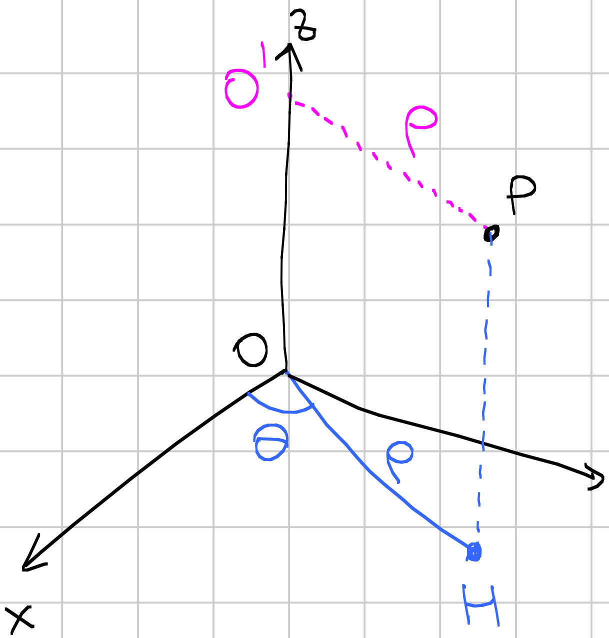
Coordinate cilindriche (nello spazio)

(x, y, z) cartesiane $\qquad\qquad$ $(\underbrace{\rho, \theta}_{\text{polari di } (x,y)}, \underbrace{z}_{\text{quota}})$ cilindriche

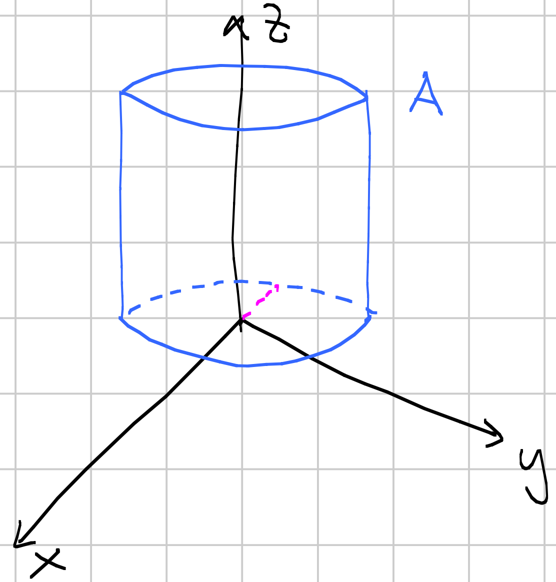
PH con segno = z

OH = $\rho \geq 0$

Altro modo di vederlo:
ρ è la distanza di P
dall'asse z   (PO')



Esempio   raggio base = 2
altezza = 3



$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, \ z \in [0,3] \}$$

In coordinate cilindriche diventa

$\rho \in [0,2]$ $\theta \in [0,2\pi]$ $z \in [0,3]$

↑ distanza dall'asse

$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 dz}_{\text{Descrizione di A in coord. cilindriche}} \quad \underbrace{z^2}_{\text{funzione in coord. cilindriche}} \quad \underbrace{\rho}_{\text{Pag. coord. cilindr.}}$$

$$= \int_0^2 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 z^2 dz = \int_0^2 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=3}$$

$$= 9 \int_0^2 \rho\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 18\pi \int_0^2 \rho\,d\rho = 18\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=2}$$

$$= 36\pi$$

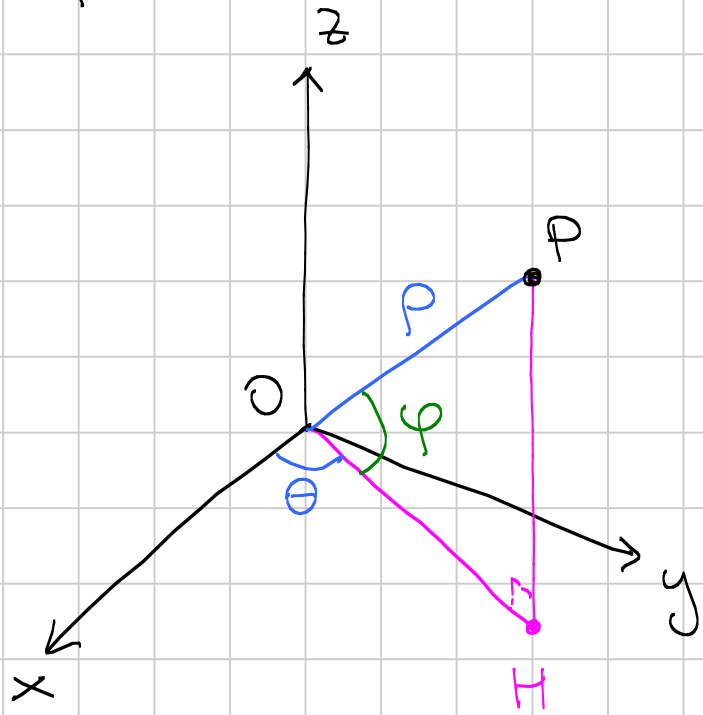
Formule di passaggio:

Noti ρ, θ, z $\longrightarrow$ $x = \rho\cos\theta$ $\quad y = \rho\sin\theta$ $\quad z = z$

Noti x, y, z $\longrightarrow$ $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \theta =$ vedi disegno $\quad z = z$

COORDINATE SFERICHE

ρ, θ, φ



ρ = lunghezza OP ≥ 0

Sia H la proiezione di P sul piano base

θ = come nelle coordinate cilindriche = angolo tra semiasse positivo delle x e semiretta OH. ($\theta \in [0, 2\pi]$)

φ = angolo tra OH e OP. $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

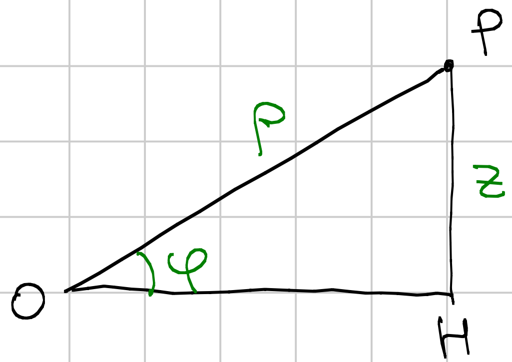
Interpretazione geografica:

- φ è la latitudine
- θ è la longitudine

Formule di passaggio:

Noti $(x,y,z) \rightsquigarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

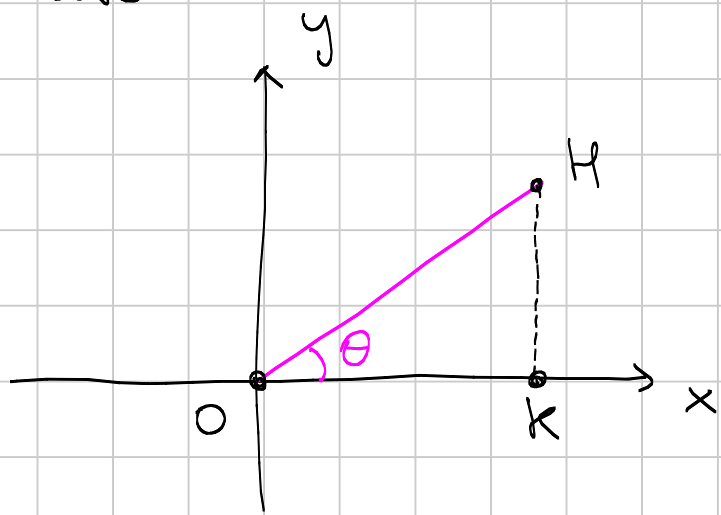
Noti $(\rho,\theta,\varphi) \rightsquigarrow$



$PH = z = \rho \sin\varphi$

$OH = \rho\cos\varphi$

Per calcolare x e y disegno il piano base



$OK = x = OH \cdot \cos\theta = \rho\cos\varphi \cdot \cos\theta$

$HK = y = OH \cdot \sin\theta = \rho\cos\varphi \cdot \sin\theta$

Quindi

$$\boxed{x = \rho \cos\varphi \cos\theta \qquad y = \rho\cos\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \sin\varphi}$$

Casi particolari:

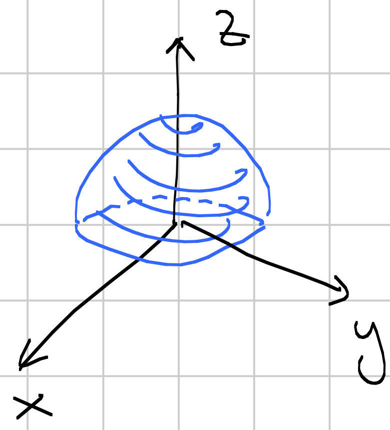
* l'origine $(0,0,0)$ ha $\rho = 0$ e θ e φ non definite
* per tutti i punti dell'asse z si ha $\varphi = \frac{\pi}{2}$ per $z>0$ e $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ per $z<0$. Inoltre H coincide con O, dunque θ non è definito.

<u>Descrizione di insiemi in coordinate sferiche</u>

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ p.ti dello spazio che distano da O meno di 2

$\rho \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

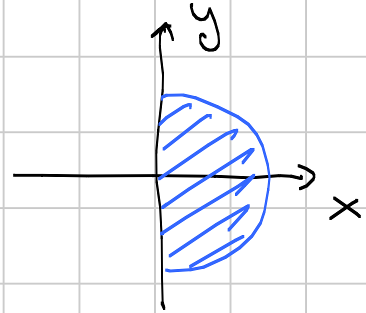
$$B = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 3}_{\text{sfera di raggio } \sqrt{3}},\ \underbrace{z \ge 0}_{\text{parte alta}} \}$$



$$\rho \in [0,\sqrt{3}],\quad \theta \in [0,2\pi],\quad \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{2}]$$

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x \ge 0 \}$$

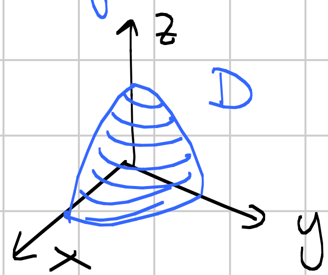
vista dall'alto



$$\rho \in [0,\sqrt{2}],\quad \theta \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}],\quad \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \} = \tfrac{1}{8} \text{ di sfera}$$

$$\rho \in [0,3],\quad \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}],\quad \varphi \in [0,\tfrac{\pi}{2}]$$



Ragamento $\qquad J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \cos\varphi$

Esempio

$$\iiint_D z^2 \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \underbrace{\int_0^3 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\text{Descrizione } D \text{ in coord. sferiche}} \; \underbrace{\rho^2 \sin^2\varphi}_{z^2 \text{ in coord. sferiche}} \; \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{J}$$

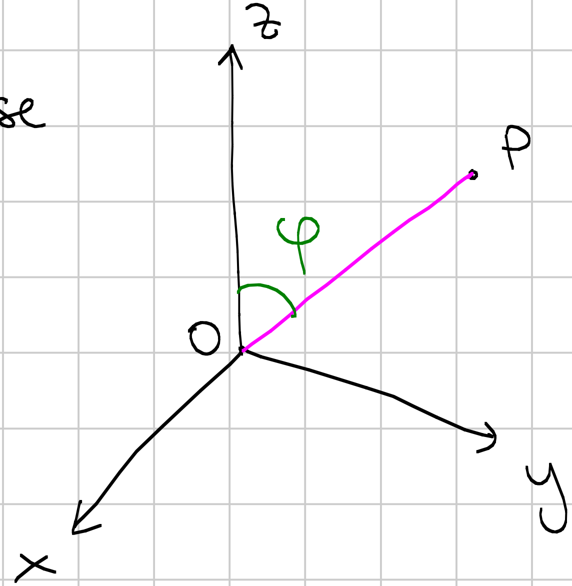
$$= \int_0^3 \rho^4 d\rho \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta}_{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^3 \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^3 \rho^4 d\rho \left[\frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^3 \rho^4 d\rho \quad \text{e si finisce}$$

ACHTUNG! I fisici usano spesso altre coord. sferiche

φ è l'angolo fra OP e il semiasse positivo delle z.



Quindi

$$\varphi_{fisici} \in [0, \pi]$$

$$\varphi_{fisici} + \varphi_{geografi} = \frac{\pi}{2}$$

Tutto cambia nel senso che $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$ si scambiano ovunque (in tutte le formule, compreso il J)