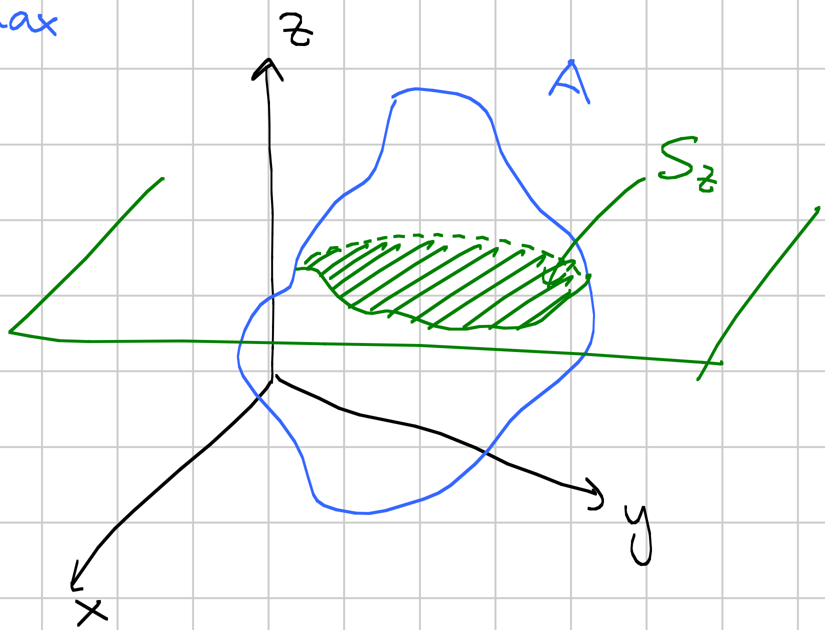
$\boxed{3 = 1 + 2}$ **FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SEZIONI**

La descrizione di un insieme A per sezioni è una scrittura del tipo

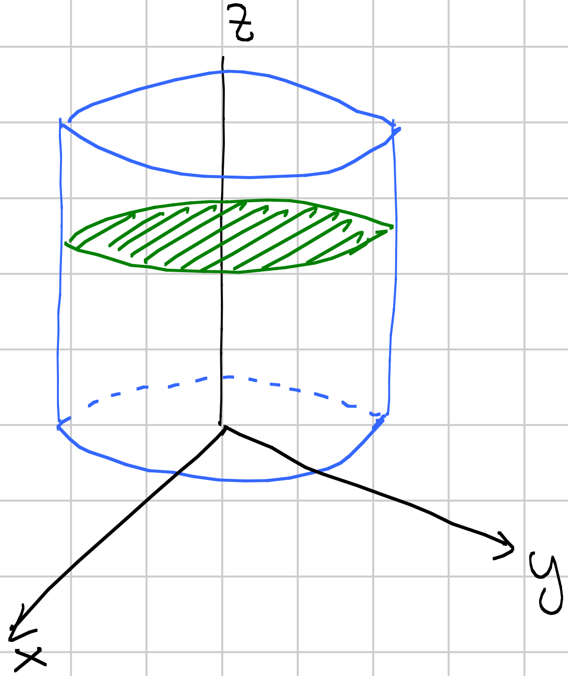
$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [\underset{z_{min}}{a}, \underset{z_{max}}{b}], \quad (x, y) \in S_z \}$$

z_{min} e z_{max} sono la minima e la massima quota dei p.ti di A.
Fissato z, S_z è la sezione di A mediante il piano // al piano base a quota z.



$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx\,dy\, f(x,y,z)$$

<u>Esempio 1</u> A = cilindro con raggio base 2 e altezza 3



$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz \overset{\text{sezioni}}{=} \int_0^3 dz \iint_{S_z} z^2\,dx\,dy$$

$z_{min} = 0 \qquad z_{max} = 3$

S_z (qualunque sia $z \in [0,3]$) è sempre il cerchio con centro nell'origine e raggio 2.

$$= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z^2\,dx\,dy = \int_0^3 z^2\,dz \underbrace{\iint_{S_z} dx\,dy}_{\text{AREA } S_z} = 4\pi \int_0^3 z^2\,dz = 36\pi$$

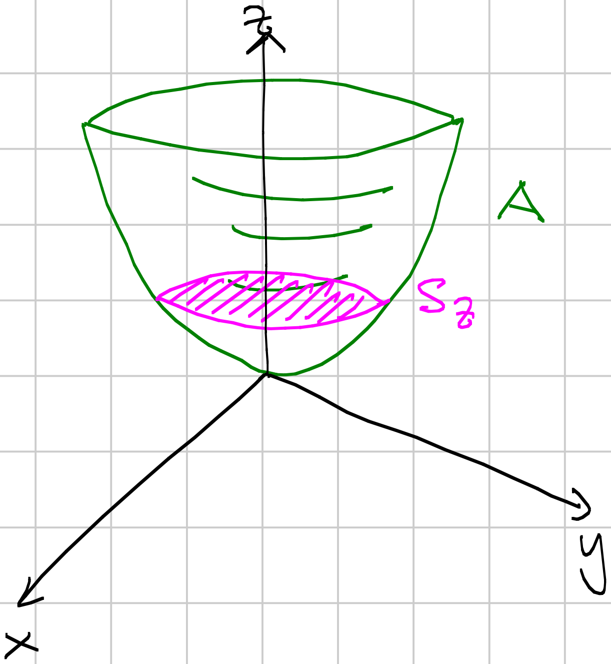
Esempio 2 $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 3\}$

$$\iiint_A z \, dx\, dy\, dz =$$

$z_{min} = 0, \quad z_{max} = 3$

$$= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z \, dx\, dy = \int_0^3 z \, dz \iint_{S_z} dx\, dy$$

$$= \int_0^3 z \, \text{Area}(S_z) \, dz$$

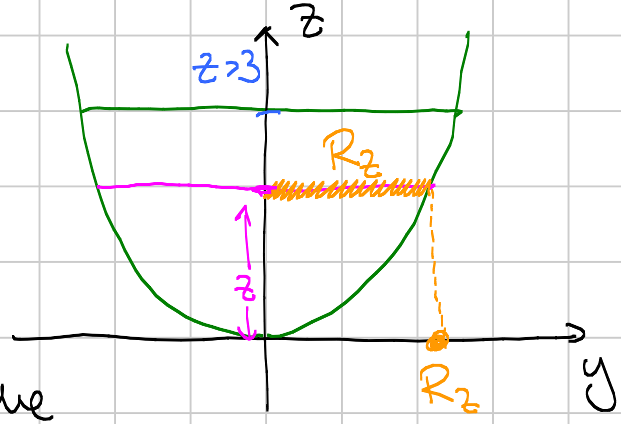


S_z è un cerchio di raggio R_z variabile. Determinare R_z

L'equazione della parabola è

$$z = y^2,$$

dunque

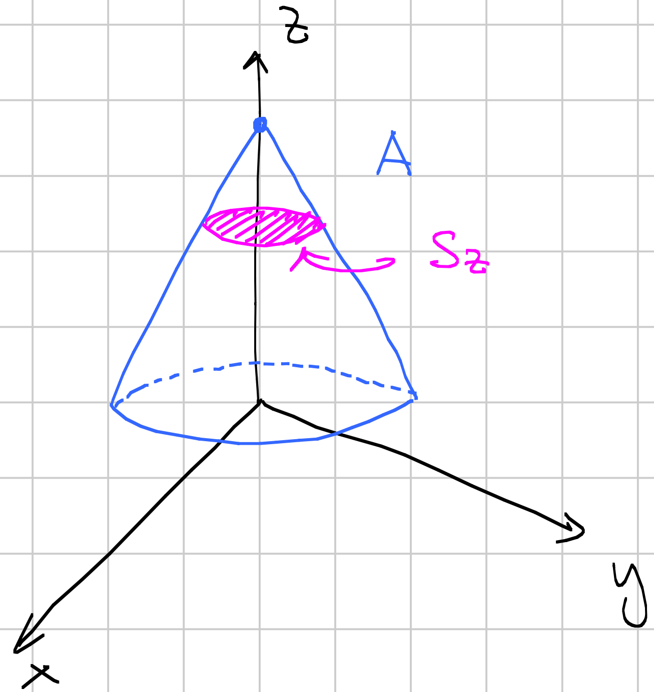


$$z = (R_z)^2 \rightarrow \text{esprime } R_z \text{ in funzione di } z$$

$$\int_0^3 z \, \text{Area}(S_z)\, dz = \int_0^3 z \cdot \pi R_z^2 \, dz = \pi \int_0^3 z^2 dz = \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=3}$$

$$= 9\pi$$

— o — o —



Esempio 3 $\quad A$ = cono

raggio base = 1

altezza = 3

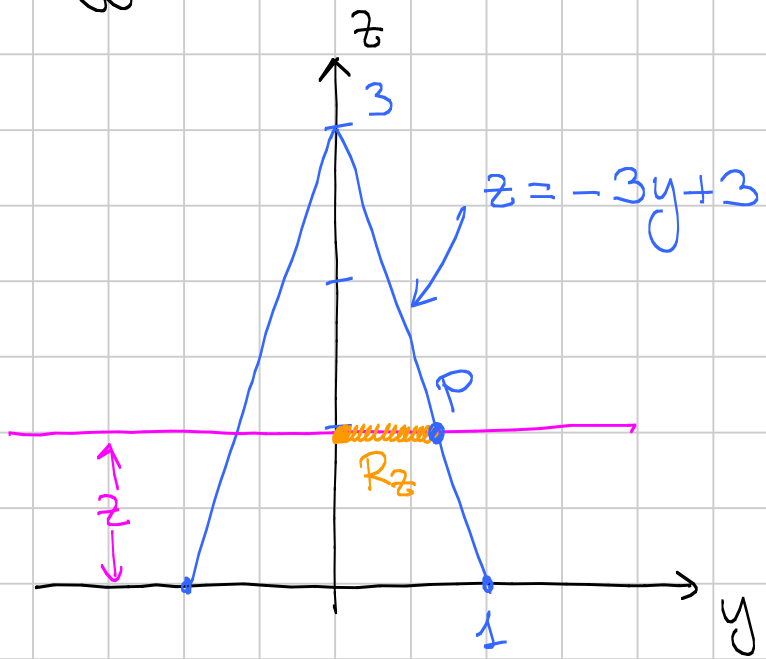
$$\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz$$

potrei farlo per colonne, ma dovrei scrivere l'eq. del cono

Proviamo per sezioni:

$$= \int_0^3 dz \iint_{S_z} z^2 \, dx\,dy = \int_0^3 z^2 dz \iint_{S_z} dx\,dy = \int_0^3 z^2 \, \text{Area}(S_z)\, dz$$

S_z, al variare di z, è un cerchio di raggio R_z



Il p.to P ha coordinate (R_z, z).

Il p.to P sta su una retta di eq.

$$z = -3y + 3.$$

Di conseguenza

$$z = -3R_z + 3 \quad \text{e quindi}$$

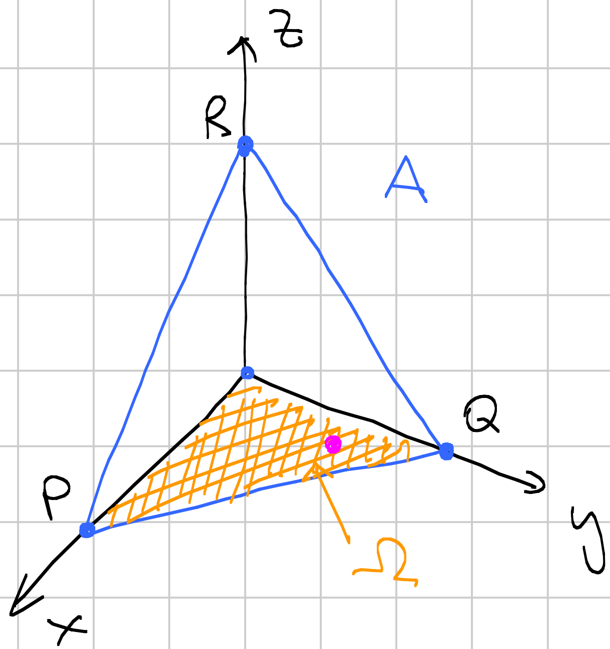
$$R_z = \frac{3-z}{3} = 1 - \frac{z}{3}$$

Piccolo controllo: $z=0 \rightarrow R=1$
$z=3 \rightarrow R=0$

$$\int_0^3 z^2 \, \text{area}(S_z)\, dz = \int_0^3 z^2 \pi R_z^2 \, dz = \pi \int_0^3 z^2 \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz$$

$= $ si fa.

Esempio 4



A = piramide con vertici in
$(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Scriviamo A come insieme normale rispetto al piano base x,y.

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \quad 0 \le z \le 1-x-y \}$$

Equazione del piano per P, Q, R : $z = ax + by + c$ oppure
$ax + by + cz = d$

In questo caso : $x + y + z = 1$, oppure $z = 1 - x - y$

Proviamo alcuni casi particolari $(x,y) = (0,0)$, $0 \le z \le 1$
$(x,y) = (1,0)$, $0 \le z \le 1-1 = 0$

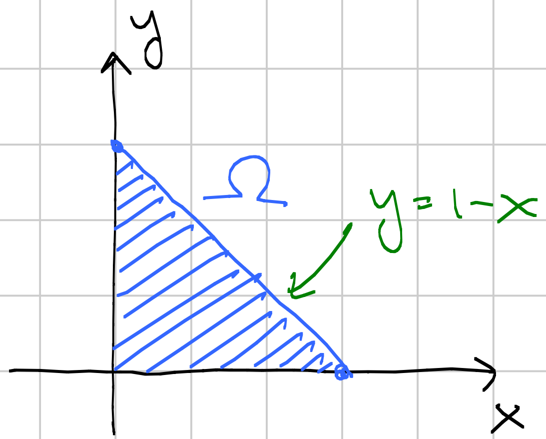
$$\iiint_A x\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{1-x-y} dz \cdot x$$

per colonne

$$= \iint_\Omega x\,dx\,dy \int_0^{1-x-y} dz$$

lungh. intervallo $= 1-x-y$

$$= \iint_\Omega x(1-x-y)\,dx\,dy =$$



$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le 1-x\}$$

insieme normale rispetto asse x

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \; x(1-x-y) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - x^2 - xy)\, dy =$$

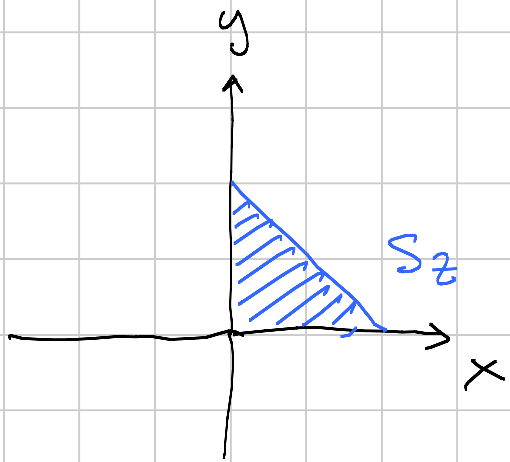
$$= \int_0^1 dx \left[xy - x^2 y - x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \int_0^1 dx \left[x(1-x) - x^2(1-x) - x \frac{(1-x)^2}{2} \right] = \text{viene} \ldots$$

— o —

$$\iiint_A x\, dx\, dy\, dz \underset{\text{sezioni}}{=} \int_0^1 dz \iint_{S_z} x\, dx\, dy$$

S_z = triangolo rettangolo isoscele
con cateti lunghi $1-z$



VERIFICARE FACENDO IN VARI MODI