MATEMATICA I

ORA 80

Titolo nota 04/12/2007

INTEGRALI TRIPLI

① Notazioni $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato

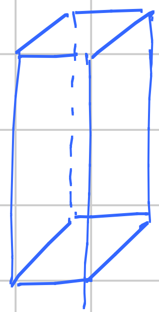
$f(x,y,z)$ $f: A \to \mathbb{R}$ limitata

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{oppure} \quad \int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

② Significato geometrico / fisico

③ Definizione

A = solido $f(x,y,z) > 0$ in A pensiamo come densità del materiale di cui è composto A.



Obiettivo: calcolare il peso di A.

Caso banale: A = parallelepipedo con spigoli paralleli agli assi

$$A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

$f(x,y,z) = \lambda$ costante in A

In questo caso peso $= \text{Volume}(A) \cdot \lambda$

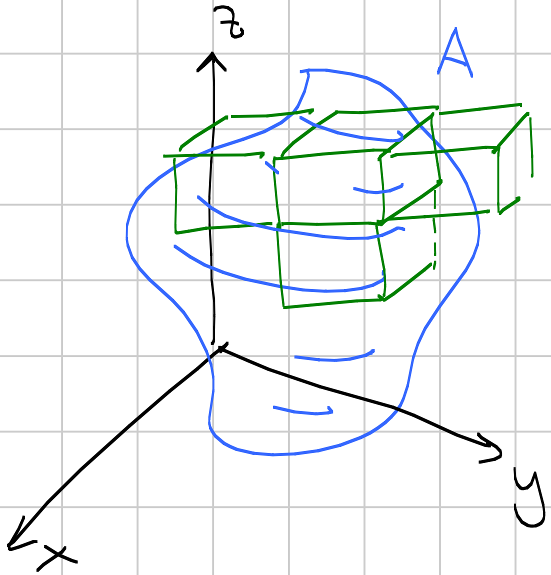
$$= (b-a)(d-c)(f-e) \cdot \lambda$$

Caso semibanale: A = unione finita di parallelepipedi come sopra che si toccano solo sul bordo (unione di mattoni)

$f(x,y,z)$ = costante (eventualmente diversa da mattone a mattone)

In questo caso: peso = somma pesi dei singoli mattoni

Caso generale : A generico insieme limitato
$f(x,y,z)$ generica funzione limitata



Suddivido il solido in tanti "mattoni".
Se voglio una approssimazione del peso dall'alto faccio finta che su ogni mattone la densità sia una costante $\geq$ dei valori di $f(x,y,z)$ in quel mattone.
Se voglio approssimazione buona devo "sforare poco ai lati" e approssimare bene su ogni mattone.

Idem se voglio approssimazione dal basso i mattoni non devono sforare, ma essere contenuti in A.

In questo modo ho costruito $I^+(f;A)$, $I^-(f;A)$

4 Tecniche di calcolo. → Formule di riduzione
→ Cambi di variabile

Formule di riduzione
- $3 = 1+1+1$ Parallelepipedi
- $3 = 2+1$ Per COLONNE
- $3 = 1+2$ Per SEZIONI

$\boxed{3 = 1+1+1}$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ parallelepipedo con spigoli // agli assi

$f(x,y,z)$ = funzione limitata qualunque

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz \; f(x,y,z)}$$

Ci sono 6 varianti di questa formula:

* posso iniziare con una qualunque delle 3 variabili (3 possib.)
* la seconda variabile la posso scegliere tra le 2 rimanenti

Esempio $\quad A = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$

$$\iiint_A (xy+z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A xy\,dx\,dy\,dz + \iiint_A z\,dx\,dy\,dz = 3+3$$
$$= 12.$$

$$\iiint_A xy\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 \boxed{x}\,\boxed{y}\,dz = \int_0^1 x\,dx \int_0^2 y\,dy \underbrace{\int_0^3 1\,dz}_{3}$$

$$= 3\int_0^1 x\,dx \int_0^2 y\,dy = 3\int_0^1 x\,dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} =$$

$$= 6\int_0^1 x\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 3$$

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 z\,dz \quad \text{oppure}$$

$$\int_0^3 dz \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,\boxed{z} = \int_0^3 z\,dz \underbrace{\int_0^1 dx}_{1} \underbrace{\int_0^2 dy}_{2}$$

$$= 2\int_0^3 z\,dz = 2\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=3} = 9$$

—o—o—

$\boxed{3 = 2+1}$ Formula di integrazione per COLONNE

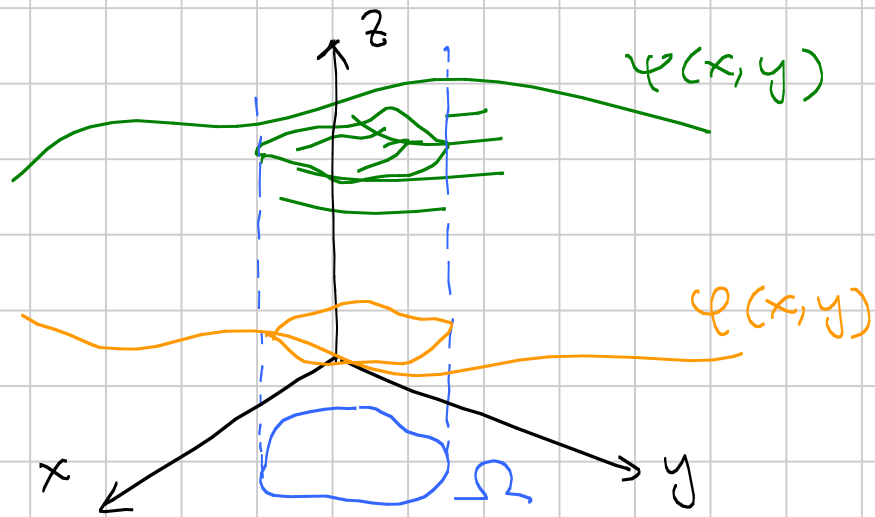
<u>Def.</u> Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano base x,y se si può scrivere nella forma

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x,y) \in \Omega,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$$

"base" FONDO CIMA

$\psi(x,y)$ descrive il COPERCHIO

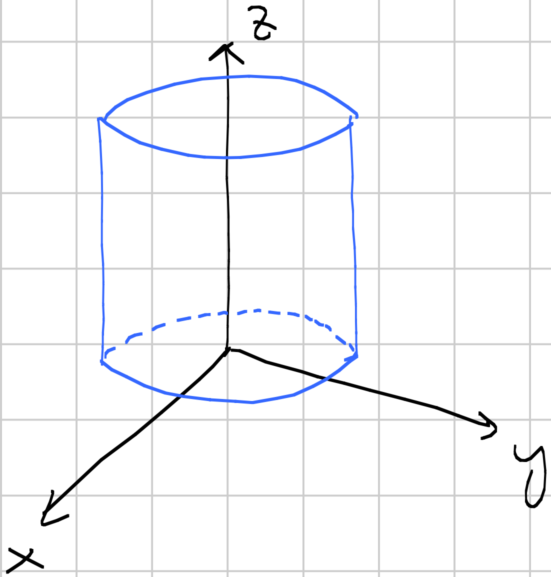
$\varphi(x,y)$ descrive il fondo



Formula di int. per COLONNE

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz}$$

<u>Esempio 1</u> A = cilindro con raggio base $=2$ e altezza $=3$ e asse lungo asse z



$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \}$$

= cerchio nel piano con centro nell'origine e raggio 2

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ 0 \leq z \leq 3 \}$$

$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^3 dz\; z^2$$

$$= \iint_\Omega dx\,dy \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=3} = 9\iint_\Omega dx\,dy$$

$$= 9\,\text{Area}(\Omega) = 9\cdot 4\pi = 36\pi$$

— o — o —

$$\iiint_A x^2\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^3 \boxed{x^2}\,dz = \iint_\Omega x^2\,dx\,dy \underbrace{\int_0^3 dz}_{3}$$

$$= 3\iint_\Omega x^2\,dx\,dy = 3\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\; \underbrace{\rho^2\cos^2\theta}_{x^2}\;\underbrace{\rho}_{PAG}$$

$$= 3\int_0^2 \rho^3\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta}_{\pi} = 3\pi\int_0^2 \rho^3\,d\rho = 3\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=0}^{\rho=2}$$

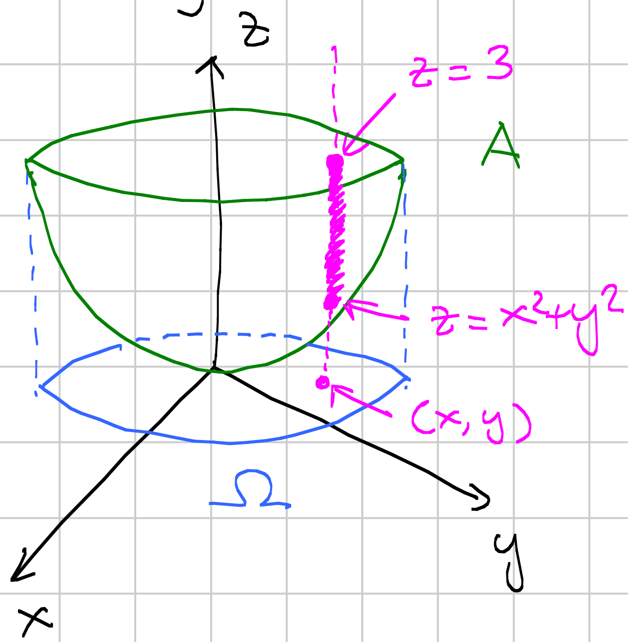
$$= 12\pi$$

$$\iiint_A x\,dx\,dy\,dz = 0$$ solite ragioni di simmetria
(volendo ci si riconduce a $\iint x$ sul cerchio)

— o — o —

<u>Esempio 2</u>

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2}_{\varphi(x,y)} \le z \le \overbrace{3}^{\psi(x,y)}\}$$



Base $\Omega =$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 3\}$$

Scrittura di A come insieme normale

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\ x^2+y^2 \le z \le 3\}$$

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \underbrace{\int_{x^2+y^2}^{3} f(x,y,z)\,dz}$$

integrale nella colonna sopra p.to (x,y)