MATEMATICA I

ORA 74

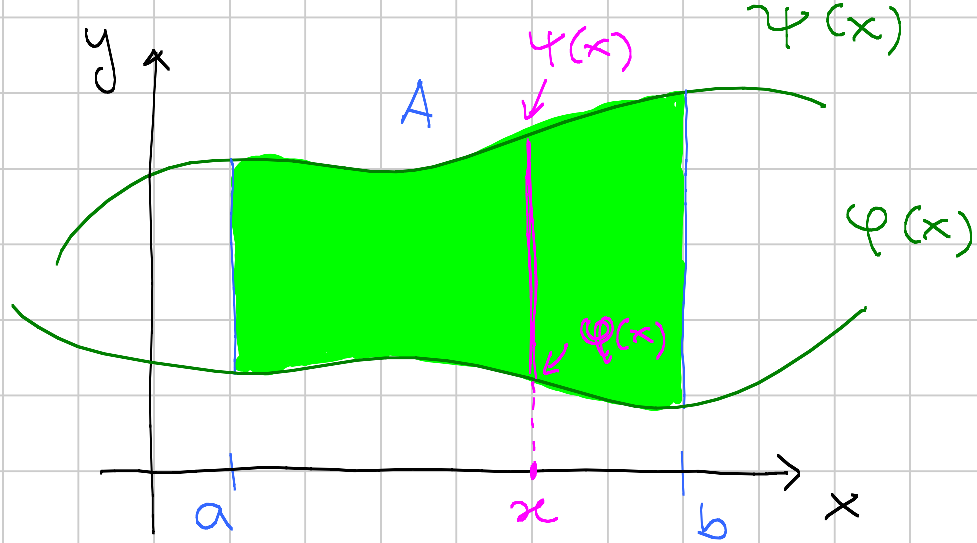
Titolo nota

28/11/2007

INSIEMI NORMALI RISPETTO ALL'ASSE x

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice NORMALE rispetto all'asse x se è della forma

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

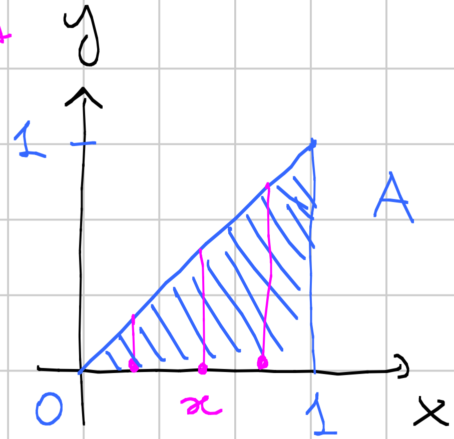


FORMULA DI RIDUZIONE PER INTEGRALI SU INSIEMI NORMALI RISPETTO ALL' ASSE x

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy}$$

Esempio 1

$$\iint_A xy^2\,dx\,dy$$



Scriviamo A come insieme normale risp. all' asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \quad 0 \le y \le x\}$$

$\varphi(x)$ = limitazione inferiore $= 0$

$\psi(x)$ = " superiore $= x$

$$\iint_A xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x \boxed{x}\, y^2\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y^2\,dy$$

$$= \int_0^1 x\,dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{1}{3}\int_0^1 x\left\{x^3 - 0\right\} dx$$

primitiva di y^2 in y $\qquad$ $y=x$ $\qquad$ $y=0$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{15}.$$

— o —

Esempio 2 $\quad A =$ come sopra $\qquad f(x,y) = x$

$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy \cdot \boxed{x} = \int_0^1 x\,dx \int_0^x dy =$$

integrale di 1 = lungh. int.

$$= \int_0^1 x\,(x-0)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ $\int_a^b 1\,dx = b-a =$ lunghezza dell'intervallo

$=$ area di un rettangolo di altezza 1 (quindi come numero coincide con la lunghezza della base)

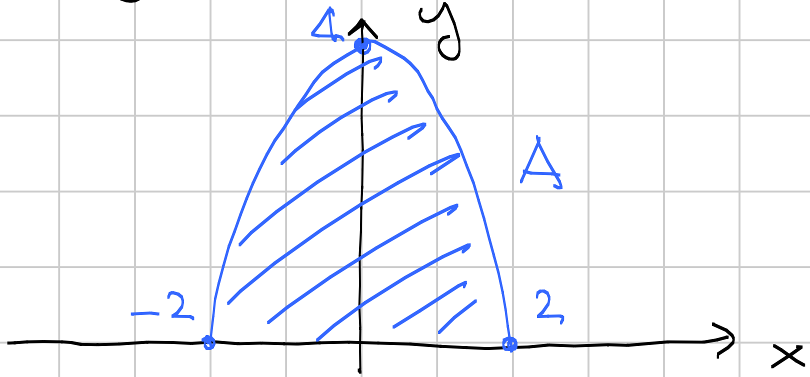
$\boxed{\text{Oss.}}$ $\iint_A 1\,dx\,dy = \text{Area}(A)$

(Sarebbe il volume di un solido con base A e altezza 1, dunque il volume coincide come numero con l'area della base)

—o—o—

Esempio 3 $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 4 - x^2\}$

$$\iint_A y\,dx\,dy$$



Scriviamo A come insieme normale risp. asse x:

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-2,2], \ 0 \le y \le 4-x^2 \}$$

$$\iint_A y \, dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} y \, dy = \int_{-2}^{2} dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=4-x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^2 \, dx = \text{int. in 1 variabile}$$

$y = 4-x^2$

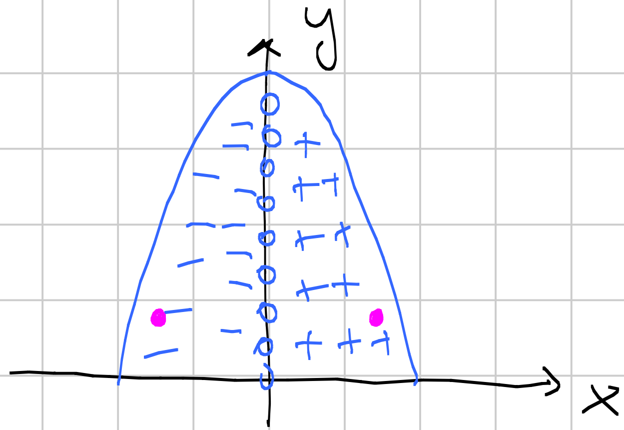
<u>Esempio 4</u> A come sopra

lungh. intervallo, cioè $4-x^2$

$$\iint_A x \, dx\, dy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} \boxed{x} \, dy = \int_{-2}^{2} x \, dx \underbrace{\int_0^{4-x^2} 1 \, dy}$$

$$= \int_{-2}^{2} x (4-x^2) \, dx = \int_{-2}^{2} (4x - x^3) \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{x=-2}^{x=2} = 0$$

Perchè si poteva dire 0 direttamente ?



La funzione x è tanto positiva a dx
quanto negativa a sx

I 2 volumi si compensano e
l'integrale risulta $=0$.

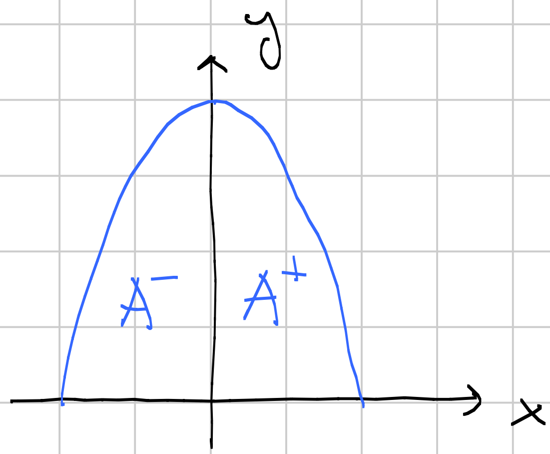
Più formalmente: $f(x,y) = x$ è DISPARI rispetto alla variabile x

$$f(-x,y) = -f(x,y).$$

L'insieme A è simmetrico rispetto alla trasformazione
$(x,y) \to (-x,y)$ (scambia dx e sinistra)

Esempio 5 $\quad A =$ sempre il solito

$$\iint_A |x|\,dx\,dy$$ (viene per forza >0)



$$= 2\iint_{A^+} |x|\,dx\,dy$$

$$A^+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2],\ 0\le y\le 4-x^2\}$$

$$= 2\iint_{A^+} x\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^2 dx \int_0^{4-x^2} \boxed{x}\,dy = 2\int_0^2 x\,dx\int_0^{4-x^2} 1\,dy = 2\int_0^2 x(4-x^2)\,dx$$

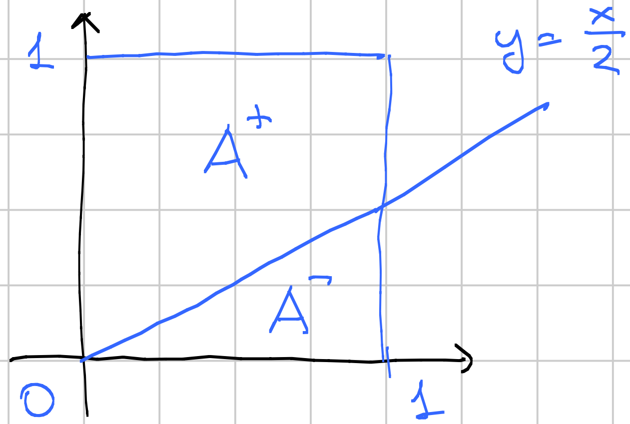
$$= 2\int_0^2 (4x-x^3)\,dx = 2\left[2x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=2} = 2\{8-4\} = 8.$$

Esempio 6 $\quad A = [0,1] \times [0,1] \qquad f(x,y) = |2y - x|$

$$f(x,y) = \begin{cases} 2y - x & \text{dove } 2y-x \geq 0, \text{ cioè dove } \quad y \geq \frac{x}{2} \\ -2y + x & \text{dove } \quad " \quad < 0 \quad " \quad " \quad y < \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\iint_A |2y - x| \, dx\, dy = \iint_{A^+} |2y - x| \, dx\, dy + $$

$$+ \iint_{A^-} |2y - x| \, dx\, dy$$



$$= \iint_{A^+} (2y - x) \, dx\, dy + \iint_{A^-} (x - 2y) \, dx\, dy =$$

$$A^- = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \quad 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \}$$

$$A^+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 (2y - x)\, dy + \int_0^1 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (x - 2y)\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[y^2 - xy \right]_{y=\frac{x}{2}}^{y=1} + \int_0^1 dx \left[xy - y^2 \right]_{y=0}^{y=\frac{x}{2}}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{1 - x}_{y=1} - \underbrace{\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}}_{y=\frac{x}{2}} \right\} + \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}}_{y=\frac{x}{2}} - \underbrace{0}_{y=0} \right\} = \ldots$$