MATEMATICA I

ORA 73

Titolo nota 28/11/2007

INTEGRALI IN 2 VARIABILI

① NOTAZIONI
② SIGNIFICATO GEOMETRICO
③ "DEFINIZIONI"
④ TECNICHE DI CALCOLO

NOTAZIONI

integranda

$$\iint_{\boxed{A}} f(x,y)\,dx\,dy \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

insieme di integrazione

variabili di integrazione

$$f : A \to \mathbb{R}$$

Integrale PROPRIO ↗ integranda $f(x,y)$ limitata $(|f(x,y)| \leq M)$
↘ A insieme LIMITATO

SIGNIFICATO GEOMETRICO

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = volume con segno della parte di spazio compresa tra il grafico di $f(x,y)$ e il piano base x,y.

CON SEGNO nel senso che le parti sopra piano base contano con segno +, quelle sotto il piano con segno −.

IDEA DELLE DEFINIZIONI

Caso banale
" semibanale
" generale

<u>Caso banale</u>: $A = [a,b] \times [c,d]$ rettangolo del piano con lati // agli assi

$f(x,y) = \lambda$ costante $\forall (x,y) \in A$

In questo caso

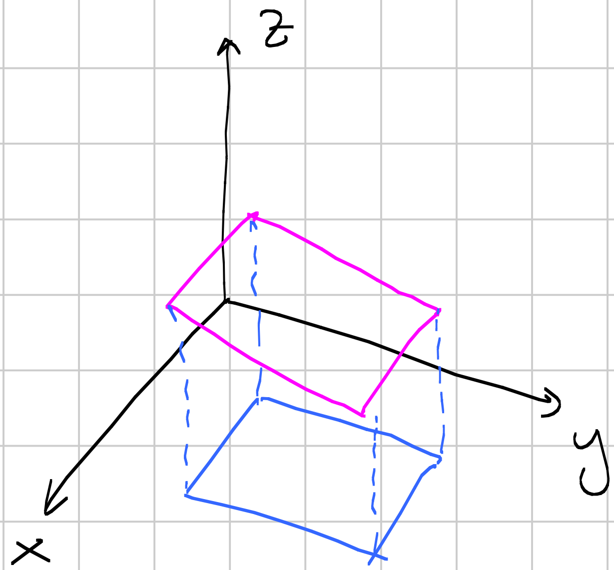
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$$

= volume con segno del parallelepipedo

= area base · altezza

$$= (b-a)(d-c)\,\lambda$$

altezza con segno.



— o —

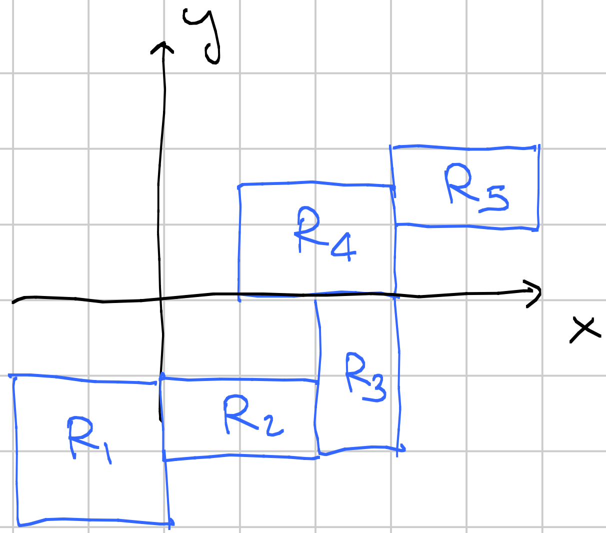
Caso semibanale : A = unione finita di rettangoli

$$R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_k$$

tutti con i lati paralleli agli assi e senza p.ti interni in comune

$f(x,y) = \lambda_i \quad \forall (x,y) \in R_i$

(costante su ogni rettangolo)



$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = somma algebrica volume dei singoli parallelepipedi

$$= \sum_{i=1}^{k} \text{Area}(R_i) \times \lambda_i$$

Area base i-esimo parall. — altezza con segno i-esimo parall.

In questo caso il grafico è "un insieme di grattacieli".
Queste funzioni si chiamano

FUNZIONI SEMPLICI   FUNZIONI A GRADINO
STEP FUNCTIONS.

<u>Caso generale</u> A = insieme limitato qualunque
f = funzione limitata qualunque

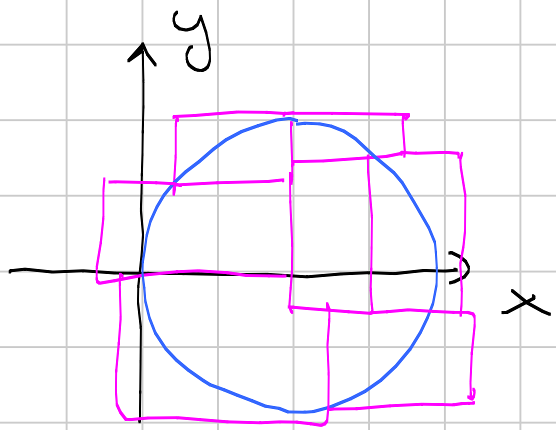
Integrale superiore $I^+(f;A) =$

$$= \inf \left\{ \iint_{\square} \varphi(x,y)\,dx\,dy \; : \; \begin{array}{l} \varphi(x,y) \text{ è funzione a gradini e} \\ \varphi(x,y) \geq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in A \end{array} \right\}$$

zona di definizione di $\varphi(x,y)$

NOTA BENE: la zona di def. di $\varphi(x,y)$ in generale può/deve essere + grande dell'insieme A.

<u>Esempio</u> A = cerchio



$\varphi(x,y)$ sfora rispetto a $f(x,y)$ sia in altezza, sia ai bordi di A

Integrale inferiore $I^-(f; A) =$

$$= \sup \left\{ \iint_B \varphi(x,y)\, dx\, dy \; : \; \begin{array}{l} \varphi(x,y) \text{ è funzione a gradini e} \\ \varphi(x,y) \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in A \end{array} \right\}$$

insieme di definizione di $\varphi(x,y)$
in generale $B \supseteq A$

Integrale inferiore e superiore esistono sempre (N.B. il fatto che A ed f siano limitati assicura che esistono funzioni a gradino $\geq f$ e altre $\leq f$). Inoltre

$$I^+(f; A) \geq I^-(f; A)$$

Se vale il segno di $=$ (cosa che accade in tutti i casi "tranquilli") si dice che f è INTEGRABILE SECONDO RIEMANN nell'insieme A e il valore comune di I^+ e I^- è l'integrale.

TECNICHE DI CALCOLO $\rightsquigarrow$ FORMULE DI RIDUZIONE

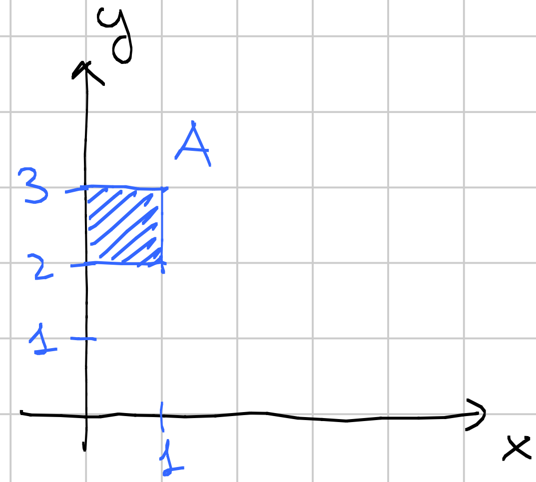
Formula di riduzione su un rettangolo

A = rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ lati // agli assi

$f(x,y)$ = funzione limitata in A

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y)}$$

Esempio 1 $\quad A = [0,1] \times [2,3] \qquad f(x,y) = xy^2$



Oss. $f(x,y) \geq 0$ in A (anzi > 0 tranne su un lato)

Quindi l'integrale sarà > 0.

$$\iint_A xy^2 \, dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 dy \; xy^2$$

$$= \int_0^1 dx \int_2^3 \underbrace{xy^2 \, dy}_{\text{Devo integrare } xy^2 \text{ rispetto alla variabile } y} = \int_0^1 dx \left[x \frac{y^3}{3} \right]_{y=2}^{y=3}$$

primitiva rispetto a y

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underset{y=3}{9x} - \underset{y=2}{\frac{8}{3} x} \right\} = \int_0^1 \frac{19}{3} x \, dx = \left[\frac{19}{6} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{19}{6}$$

In alternativa posso invertire le 2 integrazioni:

$$\iint_A xy^2\,dx\,dy = \int_2^3 dy \underbrace{\int_0^1 xy^2\,dx}_{\text{integrale risp. ad } x} = \int_2^3 dy \left[\frac{x^2}{2} y^2 \right]_{x=0}^{x=1}$$

primitiva rispetto ad x

$$= \int_2^3 dy \left\{ \frac{y^2}{2} - 0 \right\} = \frac{1}{2}\int_2^3 y^2\,dy = \frac{1}{6}\left[y^3\right]_{y=2}^{y=3} = \frac{19}{6}$$

$x=1$ $\quad$ $x=0$

— o —

Piccola astuzia:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_2^3 dy \int_0^1 x\boxed{y^2}\,dx = \int_2^3 y^2\,dy \int_0^1 x\,dx$$

è una costante