MATEMATICA I $\boxed{\text{ORA 72}}$

Titolo nota 27/11/2007

$\boxed{3^\circ \text{ caso}}$ Radici di roba di 2° grado

$$\int \sqrt{x^2+7}\,dx$$

Pongo $\sqrt{x^2+7} = x+y$.

Provo a ricavare x:

$$\cancel{x^2}+7 = \cancel{x^2}+2xy+y^2$$

resta di 1° grado in x

$$2xy = 7-y^2; \quad x = \frac{7-y^2}{2y}$$

$$dx = \left(\frac{7-y^2}{2y}\right)' dy$$

$$\int \sqrt{x^2+7}\,dx = \int \Big(\underbrace{\frac{7-y^2}{2y}}_{x} \underbrace{+y}_{+y}\Big) \underbrace{\left(\frac{7-y^2}{2y}\right)'dy}_{dx}$$

$$= \int \frac{7+y^2}{2y} \cdot \left(\frac{7-y^2}{2y}\right)' dy = \int \frac{7+y^2}{2y} \; \frac{-4y^2-14+2y^2}{4y^2} \, dy$$

e da qui è una funzione razionale...

Alla fine al posto di y devo mettere $\sqrt{x^2+7} - x$

— o —

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\displaystyle\int \sqrt{7x^2+1} \, dx$

$$\sqrt{7x^2+1} = \sqrt{7}\, x + y$$

$$\cancel{7x^2}+1 = \cancel{7x^2}+y^2+2\sqrt{7}\, xy$$

$$2\sqrt{7}\, xy = 1-y^2$$

$$x = \frac{1-y^2}{2\sqrt{7}\, y}$$

e diventa razionale

$$\int \sqrt{7x^2-3x+5}\,dx$$

$$\sqrt{7x^2-3x+5} = \sqrt{7}\,x + y$$

$$\cancel{7x^2}-3x+5 = \cancel{7x^2}+y^2+2\sqrt{7}\,x$$

→ 1° grado in x
→ ricavo x senza radici

$$\int \frac{\sqrt{7x^2+1}}{x+3}\,dx$$

NON CAMBIA NULLA ! x risulta una funzione razionale della y.

Questo metodo funziona quando l'integranda contiene un termine del tipo

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ purchè $a>0$ $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + y$

Esempio $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ $\nearrow$ 1° metodo; $x = 3\cos y$

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\cos^2 y} = 3\sin y$$

$$dx = -3\sin y\, dy$$

$\rightsquigarrow$ integrale in $\sin y$.

2° metodo $9-x^2$ Dove si annulla? $x = \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow -3 \end{cases}$

Scelgo una radice a caso: $x = 3$

Pongo $\sqrt{9-x^2} = \underbrace{(x-3)}_{x - \text{radice scelta}} \cdot y$

$$9-x^2 = (x-3)^2 \cdot y^2 ; \quad -(3+x)\cancel{(3-x)} = (x-3)^{\cancel{2}} \cdot y^2$$

$-(3+x) = (x-3)y^2$ $\rightsquigarrow$ 1° grado in x

$$-3-x = xy^2 - 3y^2 \qquad x(y^2+1) = 3y^2-3$$

$$x = 3\,\frac{y^2-1}{y^2+1} = \text{funzione razionale della } y$$

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx = \int \underbrace{\left(3\,\frac{y^2-1}{y^2+1}-3\right)}_{(x-3)} \underbrace{y}_{\cdot\, y} \underbrace{\left(3\,\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)' dy}_{dx}$$

= integrale di funzione razionale

— o — o —

Esempio 2 $\int\sqrt{x^2-6x+8}\,dx$

1° metodo: $\sqrt{x^2-6x+8} = x+y$

2° metodo (con le radici) $x^2-6x+8=0$

Radici: $x = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$ ← SCELGO A CASO QUESTA RADICE

Pongo

$$\sqrt{x^2-6x+8} = (x-4)\cdot y$$

$$x^2-6x+8 = (x-4)^2\cdot y^2$$

$$(x-2)\cancel{(x-4)} = (x-4)^{\cancel{2}}\cdot y^2$$

$$x-2 = (x-4)\cdot y^2 \longrightarrow 1^\circ \text{ grado in } x$$

$$x(1+y^2) = -4y^2+2 \qquad x = \frac{2-4y^2}{1+y^2}$$

.... sono conti

Funziona quando l'integranda contiene $\sqrt{ax^2+bx+c}$

purchè ci siano radici reali $(\Delta > 0)$

<u>Oss.</u> Per $\Delta = 0$ quello sotto la radice è un quadrato perfetto !!!

$\sqrt{ax^2+bx+c}$

	$\Delta>0$	$\Delta<0$
$a>0$	Funzionano 2 metodi	$\sqrt{\quad} = \sqrt{a}x+y$
$a<0$	Metodo con radici	?

Nel caso restante $\Delta<0$ e $a<0$, dunque quello che è sotto la radice è sempre <0, quindi la funzione integranda non è definita per nessun valore della x.

—o—o—

$\boxed{4^\circ \text{ caso}}$: funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$.

Se non funziona niente altro, provare con

$$\boxed{\sin x = \frac{2y}{y^2+1} \qquad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \qquad \text{dove } y = \tan\frac{x}{2}}$$

FORMULE TRIGONOMETRICHE

Esempio $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx =$

Pongo $y = \tan \frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2y}{y^2+1}$ ← FORMULA TRIGONOM.

$\frac{x}{2} = \arctan y$; $x = 2\arctan y$

$dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy$

$$= \int \underbrace{\frac{\cancel{y^2+1}}{\cancel{2}y}}_{\frac{1}{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+y^2}}\,dy}_{dx}$$

$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

— o — o —

Esempio $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx =$

Pongo $y = \log x$

$x = e^y$, $dx = e^y\,dy$

$$= \int \underbrace{\sin y}_{\sin(\log x)} \cdot \underbrace{e^y\,dy}_{dx} = \int e^y \cdot \sin y\,dy = \text{parti + grande ritorno}$$

$$\int_e^{25} \sin(\log x)\, dx \qquad y = \log x$$

$$= \int_{\boxed{1}}^{\boxed{\log 25}} e^y \cdot \sin\, dy$$

Estremi di integrazione:

quando $x = e$, allora $\boxed{y = 1}$

quando $x = 25$, allora $\boxed{y = \log 25}$

Faccio la primitiva in y e sostituisco i nuovi estremi ad y

Altro metodo: faccio primitiva in y, poi torno in x ponendo $y = \log x$, e sostituisco a x i vecchi estremi.