Integrazione delle funzioni razionali

$$\text{Funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Quattro fasi:

1. Divisione
2. Fattorizzazione
3. Sistema lineare
4. Integrazione

① **Divisione** Abbiamo $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Se grado di $P(x)$ è $\boxed{<}$ grado $(Q(x))$ allora non c'è nulla da fare. Altrimenti divido $P(x)$ per $Q(x)$.

$$P(x) = Q(x) \cdot A(x) + R(x)$$

resto con grado < del grado di $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x) \cdot A(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio (facile da integrare)

altra funzione razionale, ma con grado (num) < grado den.

Conclusione Fase 1: se so integrare le funz. raz. con grado (num) < grado (den), allora le so integrare tutte

Esempio 1

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Fare la divisione

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^3 & -x & \boxed{x} \;\; A(x) \\ \hline // & \boxed{-x} & \\ & R(x) & \end{array}$$

$$\underset{P(x)}{x^3} = \underset{Q(x)}{(x^2+1)} \cdot \underset{A(x)}{x} \; \underset{R(x)}{\boxed{-x}}$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)\cdot x - x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \int x\,dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log (x^2+1)$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Procedere "a occhio"

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

— o — o —

Esempio 2

$$\frac{x^3+x^5+2}{x+3} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Divisione:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^5 & & +x^3 & & & +2 & & x+3 \\ \cline{8-8}
-x^5 & -3x^4 & & & & & & \underbrace{x^4-3x^3+10x^2-30x+90}_{A(x)} \\ \cline{1-6}
// & -3x^4 & +x^3 & & & +2 & & \\
 & +3x^4 & +9x^3 & & & & & \\ \cline{2-6}
 & // & 10x^3 & & & +2 & & \\
 & & -10x^3 & -30x^2 & & & & \\ \cline{3-6}
 & & // & -30x^2 & & +2 & & \\
 & & & +30x^2 & +90x & & & \\ \cline{4-6}
 & & & // & 90x & +2 & & \\
 & & & & -90x & -270 & & \\ \cline{5-6}
 & & & & // & -268 & R(x) & \\
\end{array}$$

$$\frac{x^5+x^3+2}{x+3} = x^4-3x^3+10x^2-30x+90 - \frac{268}{x+3}$$

Volendo si può integrare subito:

$$\int \frac{x^5+x^3+2}{x+3}\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 15x^2 + 90x - 268\log|x+3|$$

— o — o —

② $\boxed{\text{FATTORIZZAZIONE}}$ Prendiamo il denominatore $Q(x)$.

Un teorema (difficile) dice che è possibile scrivere $Q(x)$ come prodotto di fattori di 1° o 2° grado, ciascuno con la propria molteplicità

$$Q(x) = \underbrace{(a_1x+b_1)^{\boxed{\alpha_1}}\cdot\ldots\cdot(a_mx+b_m)^{\boxed{\alpha_m}}}_{m \text{ fattori di } 1^\circ \text{ grado}}\cdot\underbrace{(c_1x^2+d_1x+e_1)^{\boxed{\beta_1}}\cdot\ldots\cdot(c_kx^2+d_kx+e_k)^{\boxed{\beta_k}}}_{k \text{ fattori di } 2^\circ \text{ grado}}$$

$\left.\begin{array}{l}\alpha_1,\ldots,\alpha_m\\ \beta_1,\ldots,\beta_k\end{array}\right\} \to$ molteplicità

Esempio 1

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$ 2 fattori di 1° grado con molteplicità 1

$x^2-2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ "

$x^2+1 = x^2+1$ 1 fattore di 2° grado con molteplicità 1

$x^5-3x^3 = x^3(x^2-3) = x^{\boxed{3}}(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

Fattore di 1° grado con molt. 3

due fattori 1° grado molt. 1

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$$
$$= (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = \underbrace{\overset{\Delta<0}{(x^2+1+\sqrt{2}x)}\,\overset{\Delta<0}{(x^2+1-\sqrt{2}x)}}_{\text{2 fattori di 2° grado di molt. 1.}}$$

$$x^3+1 = (x+1)\overset{\Delta<0}{(x^2-x+1)}$$

$\boxed{3}$ <u>Sistema lineare</u> Supponiamo di aver scomposto il denominatore.

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$: supponiamo che tutti i fattori abbiano molt. 1

$$\frac{P(x)}{(x-1)(x+2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Sopra i fattori di grado 1 metto costanti

" " " " " 2 metto pol. di grado 1

A, B, C, D sono incognite

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $\dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1}$

$$= \frac{Ax - A + Bx + B}{(x+1)(x-1)}$$

Uguaglio i coeff.

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ -A+B = 3 \end{cases}$$

coeff. di x
termine noto

Sommo: $2B = 4 \rightarrow B = 2 \rightarrow A = -1$

Conclusione: $\frac{x+3}{x^2+1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$

Esempio 2

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ A-B+C = 1 \\ A-C = 0 \end{cases}$$

coeff. x^2
coeff. x
termine noto

$B = -A$
$A+A+A = 1$
$C = A$

$A = \frac{1}{3}$

$B = -\frac{1}{3}$

$C = \frac{1}{3}$

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\,\frac{-x+1}{x^2+x+1}$$

Oss. Quante sono le incognite: ogni fatt. di 1° grado → 1 inc.
" 2° grado → 2 inc.

⇒ Numero incognite = somma gradi dei fattori
= grado prodotto dei fattori
= grado di $Q(x)$

Quante sono le equazioni? Sappiamo che grado num è
< grado di $Q(x)$.
Le equazioni sono quelle che corrispondono a
termine noto, coeff. x, coeff. x^2, ..., coeff x^{m-1} dove
$m = \text{grado}(Q(x))$

⇒ m equazioni

→ Le equazioni sono tante quante le incognite
→ SI DIMOSTRA che il sistema ha sempre soluz. unica.

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Ci sono fattori con molteplicità

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x+1)^3(x-5)^2(x^2+1)^2} = \underbrace{\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-5}+\frac{Dx+E}{x^2+1}}_{\text{come se non ci fossero molteplicità}}$$

$$+\frac{d}{dx}\left(\frac{F+Gx+Hx^2+Ix^3+Lx^4}{(x+1)^2(x-5)(x^2+1)}\right)$$

pol. gen. con grado inferiore di uno risp. al denom.

ciò che rimane del denom.

Ancora una volta tante eq. quante incognite!!