MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 68}}$

Titolo nota 22/11/2007

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Sostituzioni banali

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

$$\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} \quad ; \quad \int \sinh(7x)\,dx = \frac{1}{7}\cosh(7x)$$

$$\int \cos(\sqrt{2}x)\,dx = +\sin(\sqrt{2}x)\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \int \sin\frac{x}{2}\,dx = -2\cos\frac{x}{2}$$

Sostituzioni quasi banali

$$\int x \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \sin x^2$$

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} e^{x^4}$$

—o—o—

Ripartiamo da:

$$\int_a^b \varphi'(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

La applico con $\varphi(x) = F(G(x))$. Allora

$$\varphi'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = f(G(x)) \cdot g(x).$$

Sostituendo:

$$\boxed{\int_a^b f(G(x))\cdot g(x)\,dx = F(G(b)) - F(G(a)) = \underbrace{\int_{G(a)}^{G(b)} f(t)\,dt}_{\left[F(t)\right]_{t=G(a)}^{t=G(b)}}}$$

INT. PER SOSTITUZIONE
UFFICIALE

Brutalmente: devo calcolare

$$\int_a^b f(G(x))\,\underbrace{g(x)\,dx}$$

$$\downarrow$$

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(y)\,dy$$

Pongo $y = G(x)$

$\frac{dy}{dx}$ = derivata di y risp. a x

$= G'(x) = g(x)$

$\Rightarrow \quad dy = g(x)\,dx$

Come cambiano gli estremi? Quando $x=a$, ho che $y=G(a)$

" $x=b$, ho che $y=G(b)$

— o — o —

<u>Esempio 1</u>

$$\int x \cos(x^2)\, dx =$$

Pongo $x^2=y$ $\quad \frac{dy}{dx} = 2x$

$$\Rightarrow dy = 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{2x \cdot \cos(x^2)\, dx}_{dy} = \frac{1}{2}\int \cos y \, dy = \frac{1}{2}\sin y$$

$$= \frac{1}{2}\sin x^2$$

— o —

<u>Esempio 2</u> $\quad \int \frac{1}{x \log^7 x}\, dx$

Pongo $y = \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{x \log^7 x}\, dx = \int \frac{1}{\log^7 x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{dx}{x}}}_{dy} = \int \frac{1}{y^7}\, dy$$

$$= \int y^{-7}\, dy = -\frac{1}{6} y^{-6}$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{1}{y^6} = -\frac{1}{6} \frac{1}{\log^6 x}$$

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int \frac{1}{x \log x}\, dx =$

Pongo $y = \log x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ $\quad dy = \dfrac{dx}{x}$

$$= \int \frac{1}{\log x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{x}\, dx}}_{dy} = \int \frac{1}{y}\, dy = \log y = \log(\log x)$$

Esempio 4 $\int \cos^2 x \, dx$

Usare formule trigonometriche!

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \int \frac{1}{2} dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$$

Esempio 5 $\int \sin^2 x \, dx$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Esempio 6 $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Sostituzione $y = \sin x$ $\frac{dy}{dx} = \cos x$

$\Rightarrow dy = \cos x \cdot dx$

$$\int \underbrace{\boxed{\sin x}}_{y} \cdot \underbrace{\boxed{\cos x \, dx}}_{dy} = \int y \, dy = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} \sin^2 x$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Formula trigonometrica! $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) = -\frac{1}{4} \cos(2x)$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Le 2 primitive ottenute differiscono per una costante

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Per parti...

Esempio 7

$$\int \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{1-\sin^2 y}\, = \cos y} \underbrace{dx}_{\cos y \cdot dy}$$

Pongo $x = \sin y$

$\frac{dx}{dy}$ = derivata di x rispetto a y $= \cos y$

$\Rightarrow dx = \cos y \cdot dy$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2 y \, dy$$

Se $x = \sin y$, allora $y = \arcsin x$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{\cos y}}_{\sqrt{1-x^2}} \cdot \underbrace{\boxed{\sin y}}_{x} + \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{y}}_{\arcsin x}$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

In conclusione

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \cdot x + \frac{1}{2} \arcsin x$$

DERIVARE PER SICUREZZA

$\boxed{1^o \text{ arretrato}}$ $\int \frac{dx}{x} = \log x$

$\frac{1}{x}$ è definita $\forall x \neq 0$
$\log x$ solo per $x > 0$

Voglio invece una $F(x)$ t.c. $F'(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$

Questo è vero prendendo $F(x) = \log|x|$

Per $x > 0$ $F(x) = \log x$, quindi $F'(x) = \frac{1}{x}$

Per $x < 0$ $F(x) = \log(-x)$, quindi $F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1)$

$= \frac{1}{x}$

$\boxed{2^o \text{ arretrato}}$ il "$+c$"

Quali sono TUTTE le primitive di $\cos x$? Sono

$\sin x + c$

Quali sono TUTTE le primitive di $\frac{1}{x}$?

Sono $\log|x| + c$ NOOOOO !!!!!!!

Sono del tipo $F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log|x| + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$

Posso scegliere c diversi per $x>0$ e per $x<0$.
Questo succede tutte le volte che l'insieme di definizione è fatto da 2 o più pezzi ($x<0$ e $x>0$)

— o — o —

<u>Esempio 8</u> $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

Sostituisco $y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x \Rightarrow dy = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{dy}{y} = -\log|y| = -\log|\cos x|$$