DERIVATE SUCC. PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

In 2 variabili $f(x,y)$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & f_{xxx} \\
 & & f_{xx} \arrow[ur] \arrow[r] & f_{xxy} \\
 & f_x \arrow[ur] \arrow[r] & f_{xy} \arrow[r] \arrow[dr] & f_{xyx} \\
f \arrow[ur] \arrow[dr] & & & f_{xyy} \\
 & f_y \arrow[r] \arrow[dr] & f_{yx} & \\
 & & f_{yy} &
\end{tikzcd}
$$

Derivate parziali seconde

In generale, per una funzione di 2 variabili le derivate parziali k-esime sono 2^k,
per una funzione di m variabili sono m^k

Esempio $\quad f(x,y) = y\cos(xy)$

$$f_x(x,y) = -y^2 \sin(xy)$$

$$f_y(x,y) = \cos(xy) + y\,(-x\sin(xy)) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$f_{xx}(x,y) = -y^3\cos(xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = -2y\sin(xy) - y^2x\cos(xy)$$

$$f_{yx}(x,y) = -y\sin(xy) - y\sin(xy) - xy\cdot y\cos(xy)$$

$$= -2y\sin(xy) - y^2x\cos(xy)$$

$$f_{yy}(x,y) = -x\sin(xy) - x\sin(xy) - xy\cdot x\cos(xy)$$

$$= -2x\sin(xy) - x^2y\cos(xy)$$

<u>Teorema</u> In tutti i casi decenti (ad esempio se f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue) si ha che

$$f_{xy} = f_{yx}$$

<u>Corollario</u> Nel calcolare una derivata parziale qualunque (ad esempio $f_{xyyxxxy}$) posso eseguire le operazione in qualunque ordine (ad esempio $f_{xxxxyyy}$)

Conseguenza: le derivate parziali k-esime di una funzione di 2 variabili "decente" sono in realtà non 2^k, ma $(k+1)$ perchè conta solo quante volte derivo rispetto a x e lo posso fare

$$\underbrace{0, 1, 2, \ldots, k \text{ volte}}_{k+1 \text{ possibilità}}$$

~~Ad~~ esempio le derivate parziali quarte sono: f_{xxxx}, f_{xxxy}, f_{xxyy}, f_{xyyy}, f_{yyyy}

f_{xxxy} la posso realizzare in 4 modi diversi:

$$f_{xxxy}, \quad f_{xxyx}, \quad f_{xyxx}, \quad f_{yxxx} \leftarrow$$ TUTTE UGUALI

—o—

<u>Notazione</u>

$$\frac{\partial^{\boxed{52}} f}{\partial x^{37} \partial y^{15}}$$ ← NOTAZIONE GENERALE

$37+15$

37 volte rispetto ad x
15 volte rispetto ad y

<u>Esempio</u> 1 $f(x,y) = (\sin x)^{\cos x} + (\arctan y)^{\log y}$

Calcolare $f_{xy}(x,y) = 0$. Infatti

$f_x(x,y) = \text{Mostro}(x)$ (il secondo pezzo ha derivata zero rispetto ad x)

$f_{xy}(x,y) = [\text{Mostro}(x)]_y = 0$ perché il Mostro dipende solo dalla variabile x.

Esempio 2 $f(x,y) = 3xy + 7y^2 + \text{Mostro}(x)$

$$f_{yy}(x,y) = 14 \qquad f_y = 3x + 14y$$

Esempio 3 $f(x,y) = y\,\text{Mostro}(x)$

$$f_{yy}(x,y) = 0$$

— o — o —

Esempi in cui il 1° sistema dei moltiplicatori ha soluzione

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0\} \qquad \begin{cases} \phi_x(x,y) = 0 \\ \phi_y(x,y) = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Esempio 1 $\Phi(x,y) = x^2 - y^2$

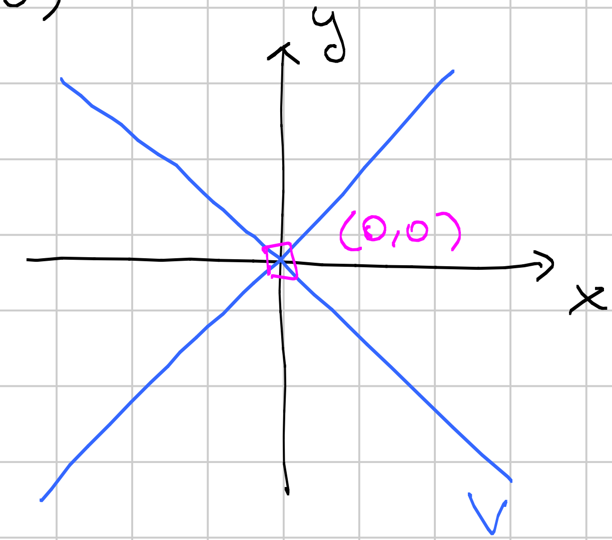
$$\begin{cases} 2x = 0 & \rightarrow x = 0 \\ -2y = 0 & \rightarrow y = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Ok con terza equaz.

La soluzione del sistema è il p.to $(0,0)$

$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0 \}$

$(x+y)(x-y) = 0$ $\nearrow y = x$ $\searrow y = -x$



Esempio 2 $\quad \phi(x,y) = x^2 - y^3$

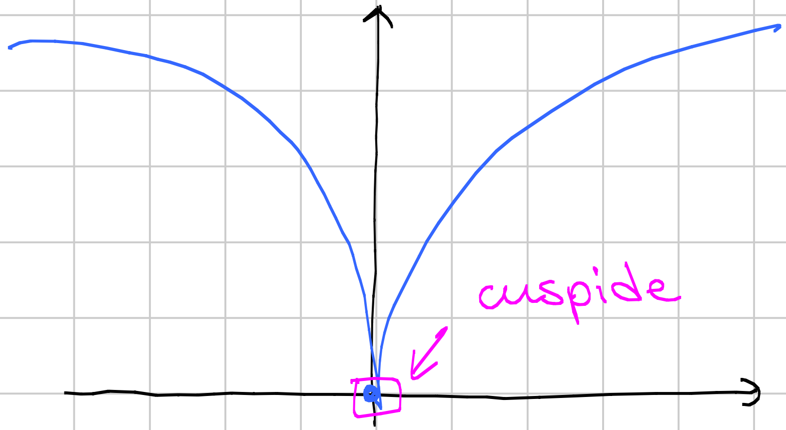
$$\begin{cases} 2x = 0 & \to x = 0 \\ -3y^2 = 0 & \to y = 0 \\ x^2 - y^3 = 0 & \end{cases}$$ ok

La soluz. del sistema è $(0,0)$

$x^2 - y^3 = 0$; $y^3 = x^2$;

$y = \sqrt[3]{x^2}$

V è il grafico di $\sqrt[3]{x^2}$



MAX E MIN SU INSIEMI NON LIMITATI

Esempio 1 $f(x,y) = x^2+y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$ e x enorme) max N.E.

$\min = 0$ p.to di min $(x,y) = (0,0)$ $\inf = 0$

infatti $f(x,y) \geq 0$ sempre (somma di quadrati)
e $f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme)

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^4 - y^4$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme poiché y^4 batte y^2)

Esempio 4 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^4+5}$

$\sup = \frac{1}{5} = \max$ p.to di max : $(0,0)$

Per avere la frazione + grande possibile, devo prendere il denom. + piccolo possibile.

Denominatore ≥ 5 sempre con uguaglianza $\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

$\inf = 0$ (x e y enormi)

min N.E. ($f(x,y)$ non si annulla mai)

Esempio 5 $f(x,y) = \arctan(xy) + ye^x$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ (x e y enormi)

$\inf = -\infty$ Metto $x=1$ $\arctan(y) + ye$ e
y enormemente negativo

Ancora + semplice: $x=0$ ottengo y e poi y enorm. neg.

Esempio 6 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$. Completamento dei quadrati

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2}y + 2y^2$$

$$= \boxed{x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}y^2} \underbrace{- \frac{9}{4}y^2 + 2y^2}$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

Se prendo y enorme e $x = -\frac{3}{2} y$, l'espressione diventa enormemente negativa $\Rightarrow$ $\inf f = -\infty$.