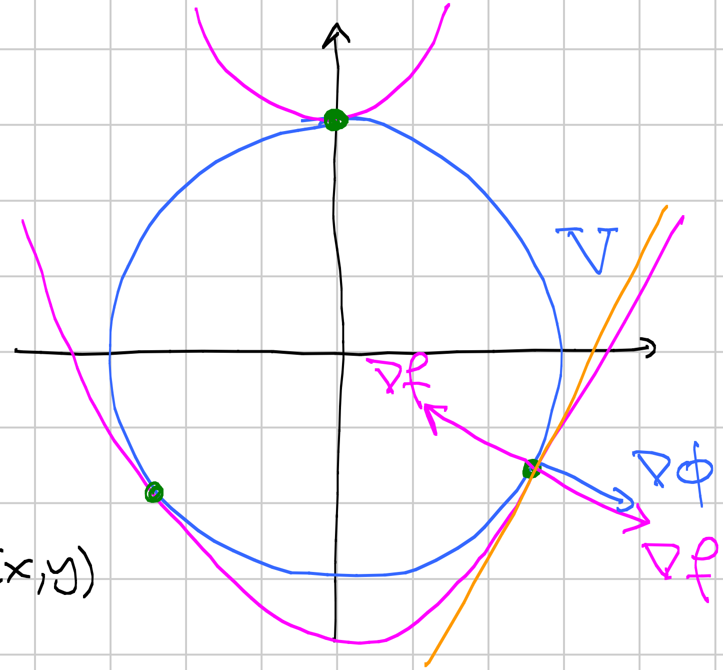
MATEMATICA I

ORA 63

Titolo nota 20/11/2007

Giustificazione "brutale" del metodo dei moltiplicatori



FATTO 1 Nei p.ti di max / min le linee di livello della funzione $f(x,y)$ sono tg. all' insieme V

FATTO 2 L'insieme V è una linea di livello della funzione $\phi(x,y)$

FATTO 3 Il gradiente di una funzione è $\perp$ alle linee di livello della funzione stessa

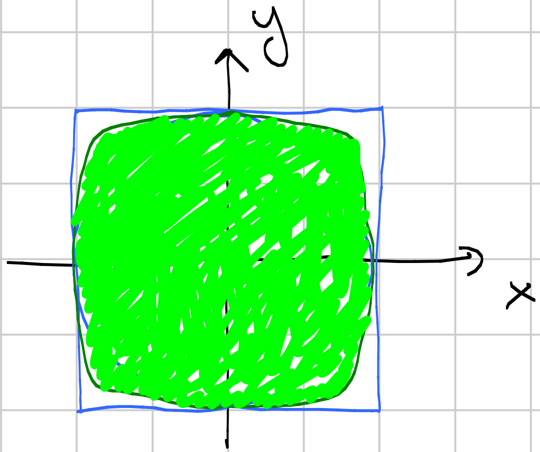
FATTO 4 ∇f e $\nabla \phi$ devono essere perpendicolari alla stessa cosa, dunque sono //, dunque sono uno multiplo dell'altro.

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $\max_{\min} \{ x^2+2y^2 : x^4+y^4 \leq 1 \}$

$f(x,y) = x^2+2y^2$ Come è fatto l'insieme $x^4+y^4 \leq 1$?

È limitato ? SI: perchè per forza $x^4 \leq 1$, cioè $|x| \leq 1$
e per forza $y^4 \leq 1$, cioè $|y| \leq 1$

Quindi l'insieme è contenuto nel quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$



Inoltre il cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1 è contenuto nell'insieme dato

Dim. Sia x_0, y_0 un punto del cerchio.
Allora $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$. Ma allora

$x_0^4 + y_0^4 \leq x_0^2 + y_0^2 \leq 1$, quindi $x_0^4 + y_0^4 \leq 1$, quindi (x_0, y_0) stanno nell'insieme

↑ perchè x_0 e y_0 stanno in $[-1,1]$

Quindi l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4 \leq 1\} = A$ è intermedio tra il cerchio ed il quadrato.

<u>Oss.</u> Gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2k}+y^{2k} \leq 1\}$ sono dei "televisori sempre + quadrati" all'aumentare di k.

Modo alternativo per vederlo:

$$x^4+y^4 \leq 1 \iff y^4 \leq 1-x^4 \iff -\sqrt[4]{1-x^4} \leq y \leq \sqrt[4]{1-x^4}$$

Non resta che studiare la funzione $\sqrt[4]{1-x^4}$

—o—o—

Torniamo a max / min di $f(x,y) = x^2+2y^2$ su A.

W $\Rightarrow$ max e min. esistono

Cerco i candidati nelle 3 categorie

① Stazionari interni: $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\boxed{(0,0)}$

② Singolari interni: $\emptyset$ perché $f(x,y)$ è sempre differenziabile

③ Bordo: il bordo di A è l'insieme

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \underbrace{x^4 + y^4 - 1}_{\phi(x,y)} = 0 \}$$

Applico il metodo dei moltiplicatori

$\boxed{3.1}$ Punti singolari del bordo = soluzioni 1° sistema

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow y = 0 \end{matrix}$$

INCOMPATIBILI CON 3ª EQ.

$\boxed{3.2}$ Punti stazionari relativamente al bordo = soluzioni 2° sistema

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$2\lambda x^3 - x = 0$$
$$\lambda y^3 - y = 0$$

1ª eq. $\quad x(2\lambda x^2 - 1) = 0$

$x = 0 \xrightarrow{(3^a \text{ eq.})} y^4 = 1 \rightarrow \boxed{(0,1)}, \boxed{(0,-1)}$

$2\lambda x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{(2^a \text{ eq.})} y(\lambda y^2 - 1) = 0$

- $y = 0 \xrightarrow{(3^a \text{ eq.})} x^4 = 1 \rightarrow \boxed{(1,0)}, \boxed{(-1,0)}$
- $\lambda y^2 - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow$ Nel caso rimasto abbiamo che $\lambda y^2 - 1 = 0$ e

$2\lambda x^2 - 1 = 0$

quindi: $x^2 = \frac{1}{2\lambda}$, $y^2 = \frac{1}{\lambda}$. Elevo alla 2ª e metto nella 3ª eq.

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 ; \frac{5}{4\lambda^2} = 1$$

$$x^4 + y^4 = 1$$

$$\rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \qquad \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{\sqrt{5}} ; \ y^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ quindi}$$

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}\right) \rightarrow \boxed{4 \text{ PUNTI}}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow x^2 = \frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{NULLA}$$

In conclusione abbiamo 9 candidati

$(0,0) \to$ staz. interno

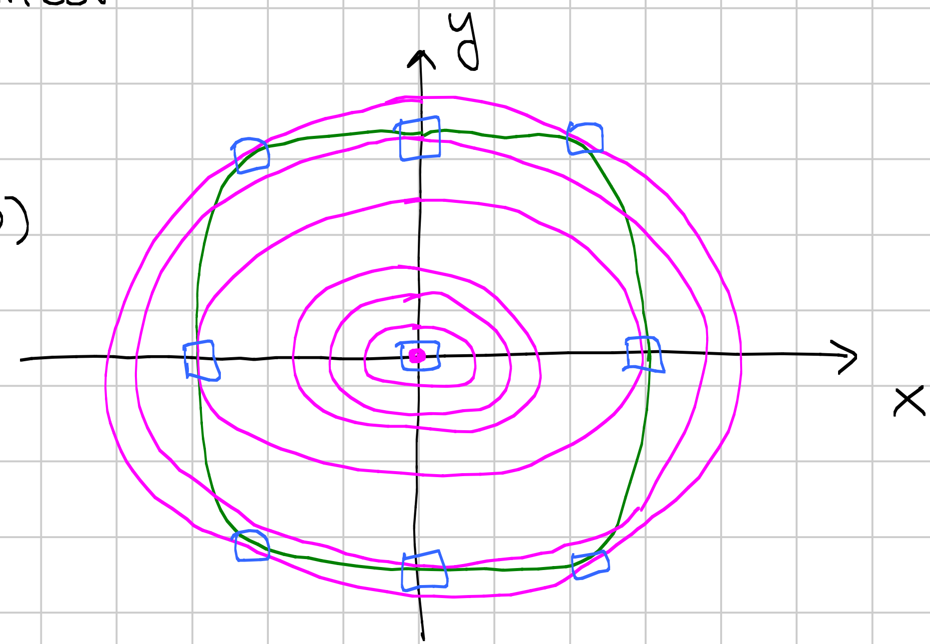
$(0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, e i 4 di sopra. Non resta che sostituire...

In termini di linee di livello $f(x,y) = \lambda$

$x^2 + 2y^2 = \lambda$ Famiglia di ellissi

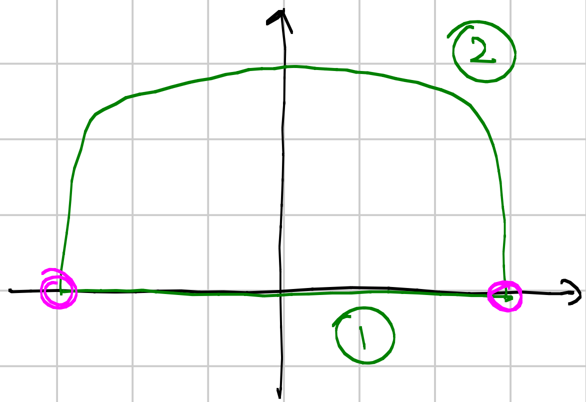
Il livello + basso corrisponde a $\lambda = 0$, che corrisponde a $(0,0)$

Quando λ sale ottengo ellissi sempre + grandi



Utilizzo misto di moltiplicatori e altre tecniche

$$\max_{\min} \left\{ x^2+2y^2 : \underbrace{x^4+y^4 \le 1, \quad y \ge 0}_{\text{INSIEME } A} \right\}$$



Il bordo di A è costituito da

* un pezzo del bordo del televisore (2)
* un segmento (1)

Quindi : pezzo (1) si fa con parametrizzazione. Per il pezzo (2) posso usare i moltiplicatori con $\Phi(x,y) = x^4+y^4-1$ ma devo

1° : escludere i candidati nella parte di televisore che non sto considerando

2° : INCLUDERE D'UFFICIO gli estremi del tratto di bordo che stiamo considerando