MATEMATICA I

ORA 60

Titolo nota 16/11/2007

MAX E MIN PER FUNZIONI DI 2 VARIABILI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

$$\max \{ f(x,y) : (x,y) \in A \}$$
$$\min \{ \qquad " \qquad \}$$

"MONDO z": max e min quota raggiunta da $f(x,y)$ al variare di (x,y) in A.

Gli eventuali p.ti (x,y) in cui tali quote max / min vengono raggiunte si chiamano p.ti di max / min.

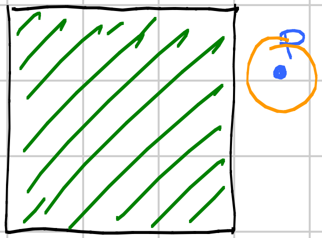
TEO. WEIERSTRASS Sia A un insieme CHIUSO E LIMITATO. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ CONTINUA

Allora Max e min esistono

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice LIMITATO se esiste $R \geq 0$ tale che A è contenuto nel cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio R.

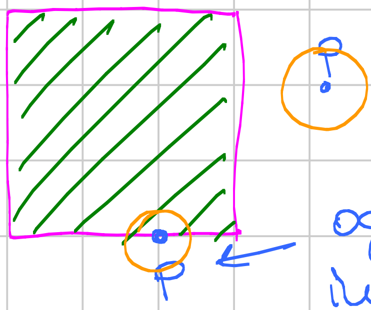
Def Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice CHIUSO se
Brutalmente: contiene il suo bordo
Più rigorosamente: $\forall P \notin A$ esiste $\varepsilon > 0$ t.c. il cerchio con centro in P e raggio ε non tocca A.

Esempio 1 Sia A = quadrato bordo compreso



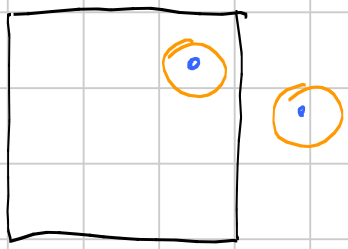
A

Sia B = quadrato senza bordo



ogni cerchio con centro in questo P tocca l'insieme $B \Rightarrow B$ NO CHIUSO

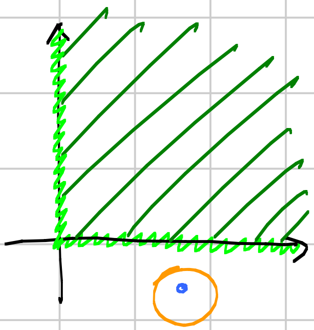
Esempio 2 Sia A il bordo di un quadrato. È chiuso? SI



È limitato? SI

Esempio 3 Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$

= 1° quadrante



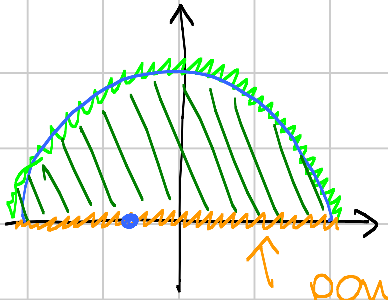
NO LIMITATO

SI CHIUSO

Esempio 4 A = una retta. NO LIMITATO SI CHIUSO

Esempio 5 $A = \mathbb{R}^2$ NO LIMITATO SI CHIUSO

Esempio 6 $\quad A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ y > 0 \}$



SI LIMITATO

NO CHIUSO

parte di bordo esclusa

— o — o —

Saputo da W. che Max / min esistono. Dove cercare i candidati p.ti di max / min ?

① STAZIONARI INTERNI : p.ti (x,y) interni ad A (non sul bordo) tali che

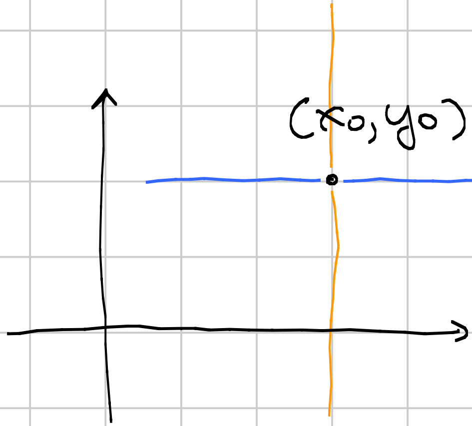
sistema di 2 eq. in 2 incognite ← $\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ cioè $\nabla f(x,y) = 0$

↑ COME VETTORE

② SINGOLARI INTERNI : p.ti (x,y) interni ad A in cui f non è differenziabile

③ BORDO → ORA SONO INFINITI PUNTI

Oss. Perché queste 3 categorie: basta dimostrare che nei p.ti di max / min interni se esistono le deriv. parziali queste si annullano



Supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di max.
Allora la funzione di 1 variabile $f(x, y_0)$ ha un max nel p.to $x = x_0$, dunque la sua derivata è $= 0$. Ma la sua derivata è $f_x(x_0, y_0)$.
Idem nell'altra direzione.

— o — o —

BORDO → Bypassare → LINEE DI LIVELLO

BORDO → Affrontare il problema → PARAMETRIZZAZIONE

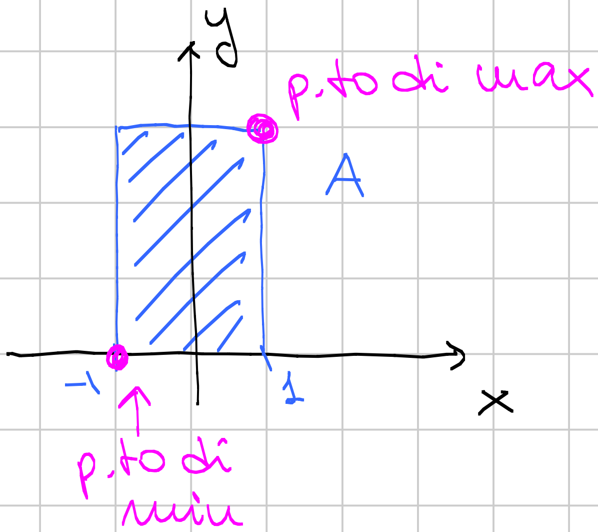
Affrontare il problema → MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Max e min con linee di livello

Esempio 1

$$\begin{matrix}\text{Max} \\ \text{min}\end{matrix} \left\{ \underbrace{2x+3y}_{f(x,y)} : \underbrace{(x,y) \in \overset{x}{\overset{\cap}{[-1,1]}} \times \overset{y}{\overset{\cap}{[0,3]}}}_{\text{Descrizione insieme } A} \right\}$$

A è chiuso e limitato
W ⇒ max e min esistono

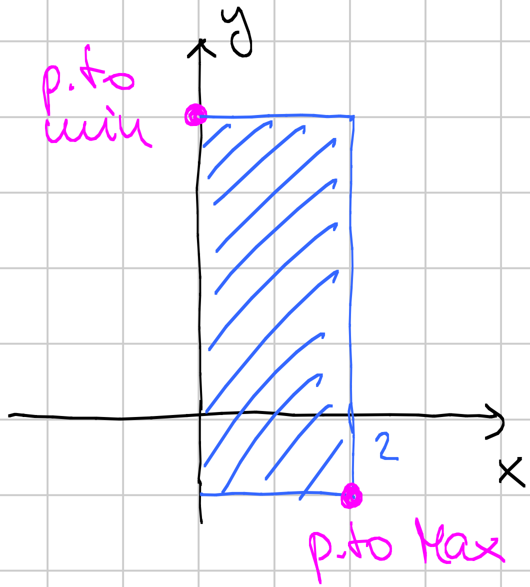


Per avere la funzione massima devo prendere x più grande possibile e y più grande possibile. Contrario per il min.

Max = 11 p.to di max: (1,3)

min = −2 p.to di min: (−1,0)

Esempio 2 $\{ x - 2y \ : \ (x,y) \in [0,2] \times [-1,4] \}$

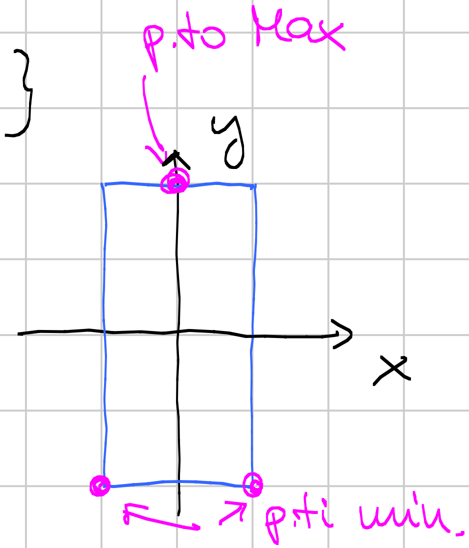


W $\Rightarrow$ max e min esistono

Per avere valori max della funzione devo prendere x più grande possibile e y più piccolo possibile.
Contrario per il minimo

Max $= 4$ p.to di max : $(2,-1)$
min $= -8$ p.to di min : $(0,4)$

Esempio 3 $\{ y - 2x^2 \ : \ (x,y) \in [-1,1] \times [-2,2] \}$



W $\Rightarrow$ max e min esistono

Se voglio la funzione max devo prendere y più grande possibile e togliere il meno poss.

con il termine $-2x^2$, cioè prendere $x=0$

Per avere funzione minima prendo y minimo possibile e x^2 + grande che posso

Max $= 2$ p.to di max: $(0,2)$

min $= -4$ p.ti di min: $(-1,-2)$ e $(1,-2)$

$$f(-1,-2) = f(1,-2) = -4$$

In tutti gli esempi fatti i p.ti di max / min stanno sul bordo.