## Diff. in 2 variabili

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

**Teorema** Se $f$ è diff. in $(x_0,y_0)$ allora $f$ è continua in $(x_0,y_0)$ inoltre esistono le derivate parziali in $(x_0,y_0)$ e
$f_x(x_0,y_0) = \alpha_1$, $f_y(x_0,y_0) = \alpha_2$

## Diff. e derivate direzionali

Quando calcolo la derivata direz. devo calcolare $\vec{v} = (\alpha, \beta)$

$$f(x_0+\underbrace{\alpha h}_{h}, y_0+\underbrace{\beta h}_{k}) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{\alpha_1}\,\underbrace{\alpha h}_{h} + \underbrace{f_y(x_0,y_0)}_{\alpha_2}\,\underbrace{\beta h}_{k} +$$

$$+\, o\left(\sqrt{\alpha^2 h^2 + \beta^2 h^2}\right) \leftarrow o\left(|h|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) = o(|h|)$$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta] h + o(|h|)}{h}$$

$$= \boxed{f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)}$$

Quindi: NOTE le derivate parziali $f_x$, $f_y$ e NOTO il vettore $\vec{v}$, questa formula permette di calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}$

— o —

**GRADIENTE** Si dice gradiente di $f$ nel p.to $(x_0, y_0)$ il vettore che ha come componenti le derivate parziali

Si indica con

$$\underset{\text{NABLA}}{\nabla} f(x_0, y_0) = \left( f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0) \right)$$

Gradiente e derivate direzionali.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \alpha f_x(x_0,y_0) + \beta f_y(x_0,y_0) \qquad \vec{v} = (\alpha, \beta)$$

$$= \vec{v} \cdot \nabla f(x_0,y_0)$$

Supponiamo che $\vec{v}$ sia un versore

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\|\vec{v}\|} \cdot \underbrace{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}_{\substack{\text{Numero fisso} \\ \text{una volta scelto } (x_0,y_0)}} \cdot \cos\theta$$

Scegliere una direzione $\vec{v}$ equivale a scegliere $\theta$.

Se scelgo $\theta = 0°$, cioè $\vec{v}$ nella stessa direz. di $\nabla f(x_0, y_0)$ la derivata direz. è max

Con $\theta = 180°$, cioè $\vec{v}$ opposto al gradiente, la deriv. direz. è minima (e opposta rispetto alla prec.)

Con $\theta = 90°$ e $\theta = 270°$, cioè $\vec{v} \perp \nabla f(x_0, y_0)$, la deriv. direz. è nulla.

Geometricamente: il gradiente rappresenta la direzione nella quale la funzione sale con la <u>massima pendenza</u>

# Riscrittura di tutto in notazione vettoriale

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ il differenziale diventa

prod. scalare

$$f(\underbrace{x_0}_{\text{vettore}} + \underbrace{h}_{\text{vettore}}) = f(\underbrace{x_0}_{\text{vettore}}) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\text{gradiente}} \cdot \underbrace{h}_{\text{vettore}} + o(\underbrace{|h|}_{\text{norma di } h})$$

Data una direzione $\vec{v}$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \vec{v} \cdot \nabla f(x_0)$$

—o—o—

Conclusione: se conosco parziali, conosco tutto!

Come si calcolano le derivate parziali? Come quelle in una variabile!

Esempi $f(x,y) = x^2+y$ $f_x(x,y) = 2x$

$f_y(x,y) = 1$

$f(x,y) = x^2 y$ $f_x(x,y) = 2xy$ $f_y(x,y) = x^2$

Calcolando $f_x$, posso suppore $y$ costante. È come se fosse $bx^2$.

$f(x,y) = x \sin y$ $f_x(x,y) = \sin y$ $f_y = x \cos y$

$f(x,y) = y \sin(x+y)$ $f_x(x,y) = y\cos(x+y)$

$y$ deve essere costante $b \sin(b+x) \rightsquigarrow b\cos(b+x)$

Calcolo $f_y$ Sostituisco mentalmente $y \sin(a+y)$

$\rightsquigarrow \sin(a+y) + y\cos(a+y)$ $f_y(x,y) = \sin(x+y) + y\cos(x+y)$

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad f_x \rightsquigarrow \frac{x}{b} \rightsquigarrow \frac{1}{b}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$f_y \rightsquigarrow \frac{a}{y} \rightsquigarrow -\frac{a}{y^2} \qquad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{\log x}{\sin y} \qquad f_x(x,y) = \frac{1}{x \sin y}$$

$$f_y(x,y) = \log x \left(-\frac{1}{\sin^2 y}\right) \cdot \cos y$$

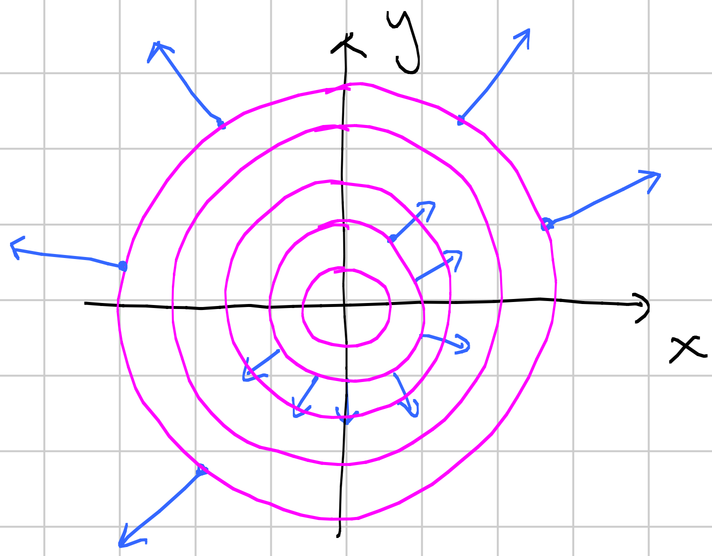
—o—o—

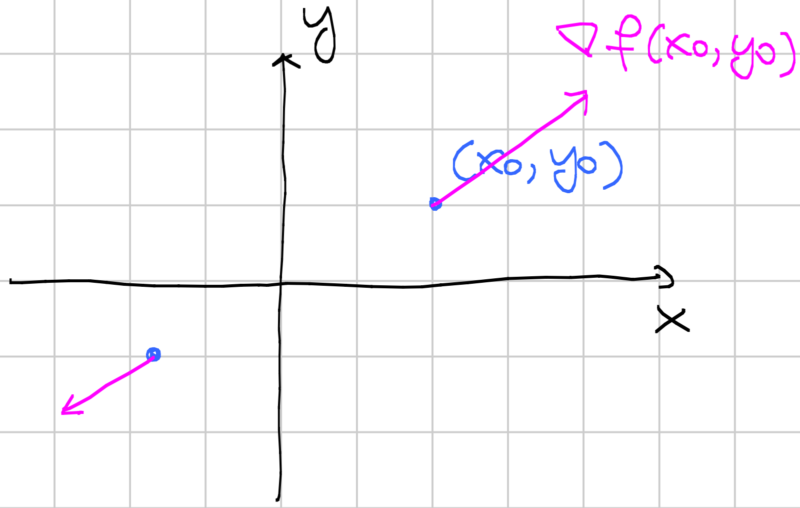
$$f(x,y) = x^y \qquad f_x(x,y) = y\,x^{y-1} \qquad x^b$$

$$f_y(x,y) = x^y \cdot \log x \qquad a^y$$

Esempi $f(x,y) = x^2+y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$




Il $\nabla f$ è $\perp$ alle linee di livello

La norma del gradiente è proporzionale alla pendenza

—o—

$f(x,y) = e^{xy} + 3x + 2y^2$. Consideriamo $(x_0,y_0) = (1,2)$

Se metto una pallina nel p.to corrispondente a $(x_0,y_0)$ dove andrà?

Opposta al gradiente!

$$\nabla f(x,y) = \left(ye^{xy} + 3,\ xe^{xy} + 4y\right)$$

$$\nabla f(1,2) = \left(2e^2+3,\ e^2+8\right)$$