MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 58}}$

Titolo nota 15/11/2007

Oggi: DERIVATE PARZIALI, DIREZIONALI, DIFFERENZIALE, GRADIENTE, ...

$\boxed{\text{Derivate parziali}}$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $f(x,y)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esiste si dice <u>derivata parziale</u> di f <u>rispetto a x</u> nel p.to (x_0, y_0)

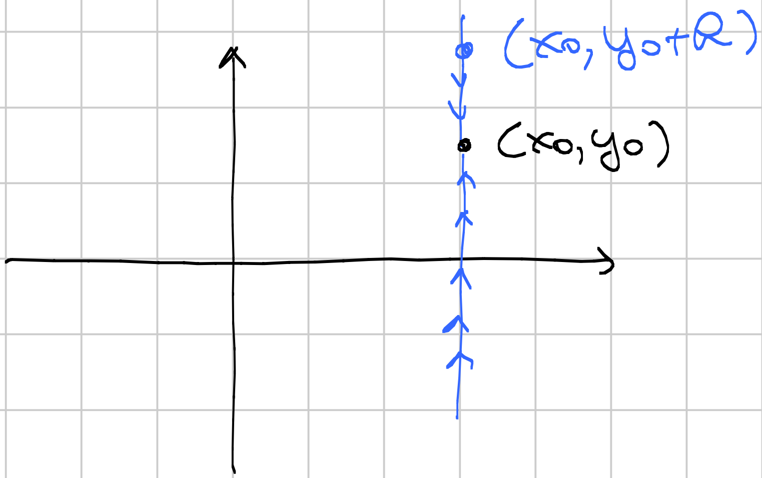
Si indica con $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oppure con $f_x(x_0, y_0)$

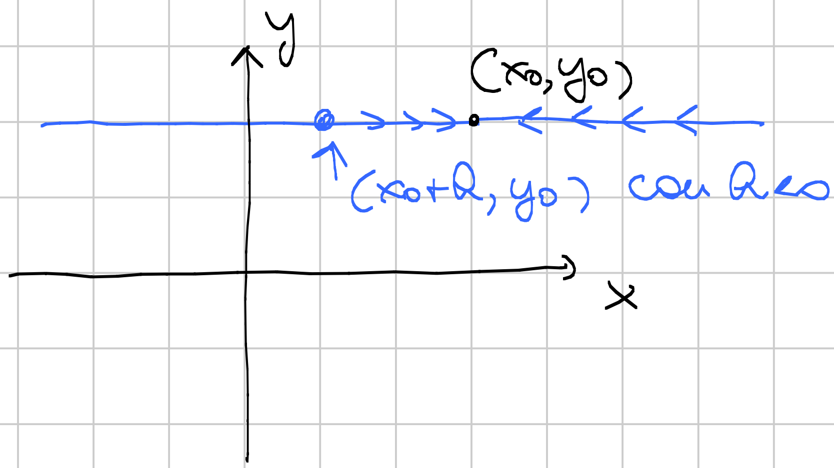
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

SE ESISTE

= deriv. parz. risp. a y

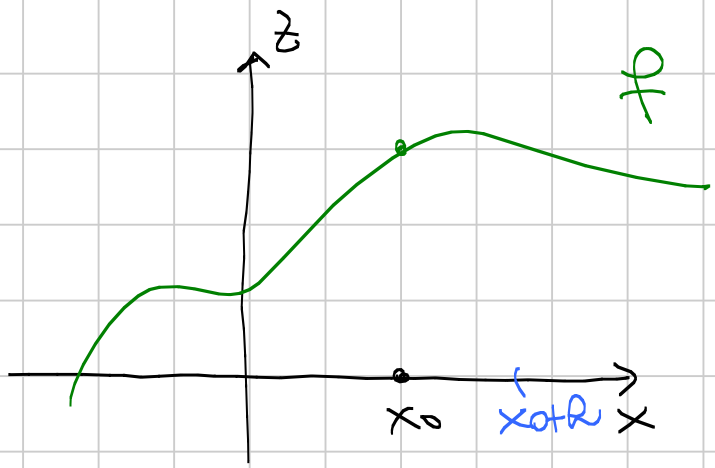
Geometricamente: (1) Cosa rappresenta (x_0+h, y_0) e (x_0, y_0+h)





(2) Cosa rappresenta $f_x(x_0, y_0)$. Quando definisco $f_x(x_0, y_0)$ mi interessano solo i valori di f sulla retta // asse x passante per (x_0, y_0). Consideriamo la restrizione di $f(x,y)$ a quella retta

$f_x(x_0, y_0)$ è la derivata della restrizione alla retta calcolata nel p.to x_0

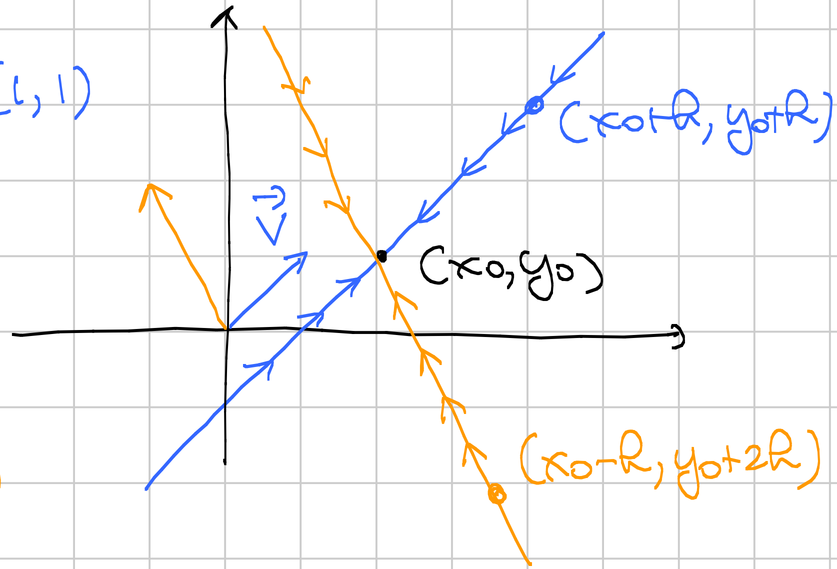


Derivate direzionali

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h, y_0+2h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$\vec{v} = (1,1)$



$\vec{v} = (-1,2)$

Più in generale: dato un vettore $(\alpha, \beta) = v$ posso definire

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+\alpha h, y_0+\beta h) - f(x_0,y_0)}{h} = \text{(se esiste)}$$

$=$ derivata direzionale di f nel p.to (x_0, y_0) rispetto alla direzione v

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

Il vettore $\vec{v}$ è parallelo alla direzione di avvicinamento al p.to (x_0,y_0)

Oss (1) Vanno bene tutte le direzioni $\vec{v}$ tranne $(0,0)$ $\quad \vec{v} \neq 0$

(2) Le derivate parziali sono in particolare derivate direzionali

$f_x \rightsquigarrow$ corrisponde a $\vec{v} = (1,0)$

$f_y \rightsquigarrow$ " " $\vec{v} = (0,1)$

(3) Cosa succede se uso $\vec{v} = (2,0)$

$$\lim_{h \to 0} \boxed{\frac{f(x_0+2h, y_0) - f(x_0, y_0)}{2h}} \cdot 2 = 2 f_x(x_0, y_0)$$

Metto $k = 2h$

Più in generale se $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ (sono multipli) allora

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

(4) Basta conoscere le derivate nelle direzioni $\vec{v}$ date da versori $(|\vec{v}| = 1)$

Derivate parziali e direzionali in notazione vettoriale

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad v \in \mathbb{R}^n$ $\quad |v| \neq 0$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)}_{\text{VETTORI}} \underset{\text{se esiste}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$

Numeri

$$\vec{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \vec{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\vec{x}_0 + h\vec{v} = (x_1 + h\alpha_1, x_2 + h\alpha_2, \dots, x_n + h\alpha_n)$$

In questa notazione le derivate parziali corrispondono ai vettori $\vec{v}$ che hanno una coordinata uguale ad 1 e tutte le altre uguali a zero (base canonica di $\mathbb{R}^n$)

Derivate parziali / direzionali e o piccolo

In una variabile dire $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

era (è) equivalente a dire

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

In 2 variabili la definizione di $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ è equivalente a

$$f(x_0+h, y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + o(h)$$

Analogamente

$$f(x_0, y_0+h) = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)h + o(h)$$

In una variabile f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

In 2 o più variabili NON è più vero! Esistono funzioni che non sono continue in (x_0, y_0) ma hanno in (x_0, y_0) tutte le derivate direzionali, addirittura $= 0$.

$\boxed{\text{DIFFERENZIALE}}$ In una variabile: f è diff. in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

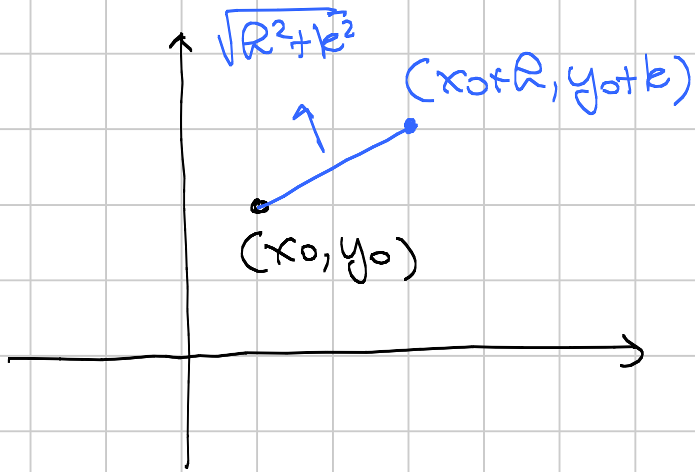
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

In due variabili: f è diff. in (x_0, y_0) se esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha_1 h + \alpha_2 k + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

movimento indipendente su x e y

Cosa vuol dire $o(\sqrt{h^2+k^2})$?



Si dice che

$$g(h,k) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \quad \text{se}$$

$$\lim_{\boxed{(h,k)\to(0,0)}} \frac{g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Limite in 2 variabili

Conclusione: le definizioni di der. direz. e parziali coinvolgono limiti in 1 variabile

la definizione di diff. contiene un limite in 2 variabili