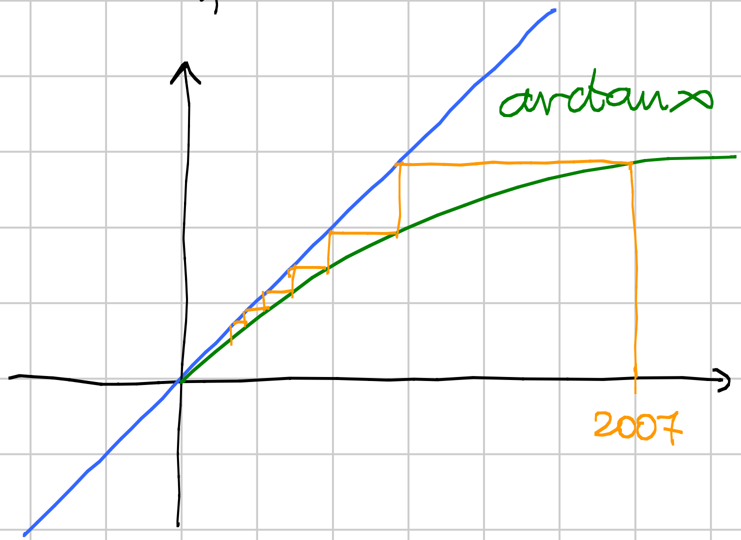
MATEMATICA I

ORA 54

Titolo nota 13/11/2007

Esempio 1 $a_0 = 2007$ $a_{n+1} = \arctan a_n$



PIANO (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

Dim (i) INDUZIONE ...

Dim (ii) **1° modo**: risolvendo la disequazione

$a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$ $\arctan a_n \overset{?}{\leq} a_n$ Ci si riduce alla disequazione

$\arctan x \leq x$ risolta precedentemente studiando la funzione $x - \arctan x$

Avevamo trovato che $\arctan x \leq x \iff x \geq 0$

Quindi $\arctan a_n \leq a_n \iff a_n \geq 0$ (vero perchè dim. al pto (i))

$\boxed{2^{\circ}\text{ modo}}$: per induzione a sua volta

$\boxed{n=0}$ $a_1 \leq a_0$ $\qquad a_1 = \arctan a_0 = \arctan 2007 \leq \frac{\pi}{2} \leq 2007 = a_0$

È vero che $a_1 \leq a_0$

$\boxed{P.I.}$ Ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n$ $\qquad$ Tesi: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

Dim. parto dall'ipotesi $a_{n+1} \leq a_n$ e applico la funzione $\arctan x$ che è strett. crescente e quindi conserva i versi

Ottengo:

$$\underbrace{\arctan a_{n+1}}_{= a_{n+2}} \leq \underbrace{\arctan a_n}_{= a_{n+1}}$$

$$a_{n+2} \leq a_{n+1}$$

Dim (iii): (i) + (ii) + Teo. succ. monotone

Dim (iv) $\boxed{a_{n+1}} = \boxed{\arctan a_n}$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\ell = \arctan \ell$$

L'unica soluz. dell'eq. $x = \arctan x$ è $x = 0$ (dimostrato sempre con studio di funzione).

— o —

Esercizio (HARD) Abbiamo appena dimostrato che $a_n \to 0$

Domanda: come si comporta $\sum a_n$?

— o — o —

$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ $a_0 = 2007$ $\qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n + n}{2n+7}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq a_n \leq 10.000$

(ii) $\ell = \frac{1}{2}$

Dim. di (ii) dando per buono (i)

$$\boxed{\frac{n}{2n+7}} \leq \boxed{\frac{a_n+n}{2n+7}} \leq \boxed{\frac{10.000+n}{2n+7}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{1}{2}$$

Visto che $a_{n+1} \to \frac{1}{2}$, anche $a_n \to \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $a_n \geq 0$ FACILE INDUZIONE

$a_n \leq 10.000$ INDUZIONE PURE $\boxed{n=0}$ OK

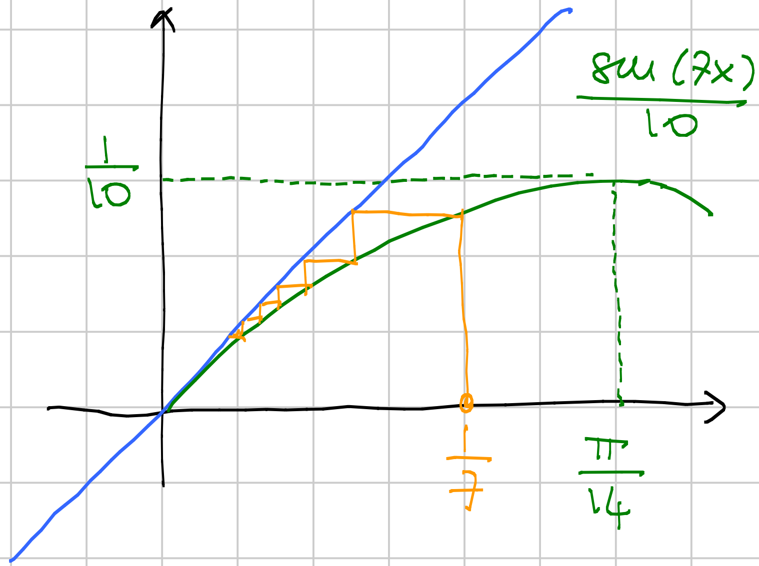
$\boxed{\text{P.I}}$ ipotesi: $a_n \leq 10.000$ Tesi: $a_{n+1} \leq 10.000$

$$a_{n+1} = \frac{a_n+n}{2n+7} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso ipotesi}}}{\leq} \frac{10.000+n}{2n+7} = \frac{10.000}{2n+7} + \frac{n}{2n+7}$$

$$\leq \frac{10.000}{7} + \frac{n}{2n} = \frac{10.000}{7} + \frac{1}{2} \leq 10.000. \qquad \square$$

$\boxed{\text{Esercizio 3}}$ $a_{n+1} = \dfrac{\sin(7a_n)}{10}$ $a_0 = \dfrac{1}{7}$

$$f(x) = \frac{\sin(7x)}{10}$$



Per $x > 0$ abbiamo che $f(x) < x$.

Motivo $f(x) = \dfrac{\sin(7x)}{10} \leq \dfrac{7x}{10} \leq x$

per disug. classica $\sin y \leq y$ per ogni $y \geq 0$

$\boxed{\text{PIANO CON MONOTONIA}}$

VERIFICARE PER ESERCIZIO

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{PIANO CON DISTANZA}}$ Pongo $d_n = |a_n - 0| = |a_n|$

(i) $d_{n+1} \leq \frac{7}{10} d_n$

(ii) $d_n \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n d_0$ (i) + INDUZIONE

(iii) $d_n \to 0$ (ii) + carabinieri $\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{d_n}} \leq \underbrace{\left(\frac{7}{10}\right)^n d_0}_{\downarrow \atop 0}$

Il p.to fondamentale da dimostrare è il p.to (i)

$$d_{n+1} = |a_{n+1}| = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$$

Ho usato che
$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ $\leftarrow$ $= |f'(\xi)|\,|a_n - 0|$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n$$

Ho quindi dimostrato che

$$d_{n+1} = |f'(\xi)| \cdot d_n$$

il problema è che non conosco ξ. Tuttavia

$$f'(x) = \frac{7\cos(7x)}{10}, \quad \text{quindi} \quad |f'(\xi)| \leq \frac{|7\cos(7\xi)|}{10} \leq \frac{7}{10}$$

quindi in ogni caso $d_{n+1} \leq \frac{7}{10} d_n$, che è quello che volevo dimostrare.

—o—o—

$\boxed{\text{Oss. 1}}$ Ho in realtà dim. che $f(x)$ è Lipschitziana con costante $7/10 < 1$.

$\boxed{\text{Oss. 2}}$ Il piano con la distanza vale qualunque sia il dato iniziale

$\boxed{\text{Oss. 3}}$ Nell' esempio dato, come si comporta $\sum a_n$?

Sappiamo che $a_n \to 0$, dunque può convergere.
Applico CRITERIO RAPPORTO (serve $a_n > 0$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\frac{\sin(7a_n)}{10}}_{a_{n+1}} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{1}{10} \boxed{\frac{\sin(7a_n)}{7a_n}} 7 \to \frac{7}{10} < 1$$

è come $\frac{\sin x}{x}$ con $x \to 0$

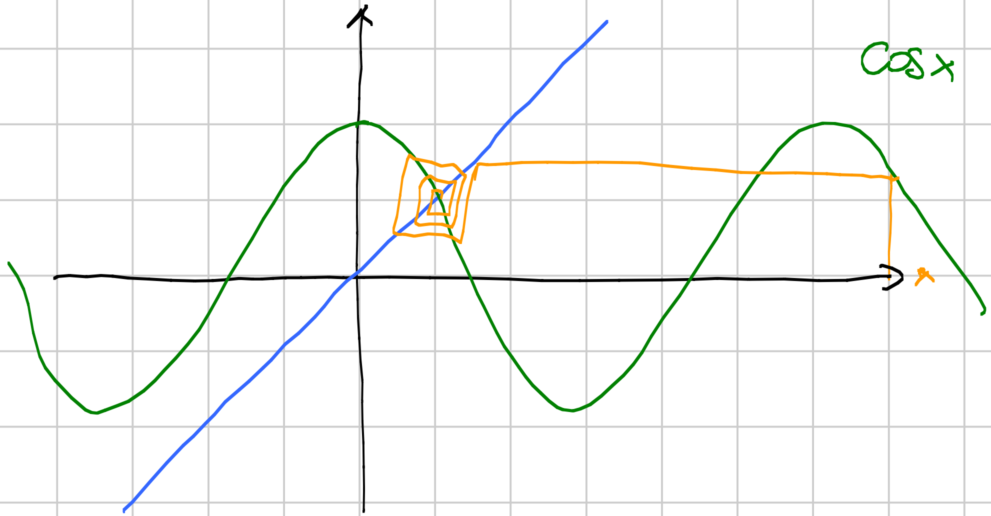
$\Rightarrow$ la serie converge.

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ $a_{n+1} = \cos a_n$ $\qquad a_0 = 2007$

Equivale a scrivere 2007 sulla calcolatrice e poi continuare a schiacciare "cos".

Idea: $a_n \to \ell$, dove ℓ è l'unica soluzione dell'equazione



$$a_{n+1} = \cos(a_n)$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\ell = \cos(\ell)$$

Cose da dim.: (i) l'eq. $\cos x = x$ ha un'unica sol. reale (si dimostra studiando $x - \cos x = 0$)

(ii) $a_n \to \ell$ (si dimostra mediante un piano con la distanza)

IN QUESTO CASO UNA SUCC. PER RICORRENZA SI PUÒ USARE PER APPROSSIMARE LA SOL. DI UN'EQUAZIONE